14. Orientierbarkeit

R kommutativer Ring.

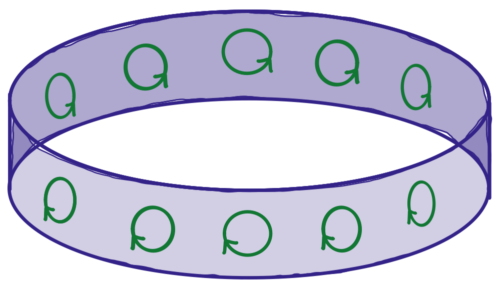
M n-Mannigfaltigkeit, $x \in M$

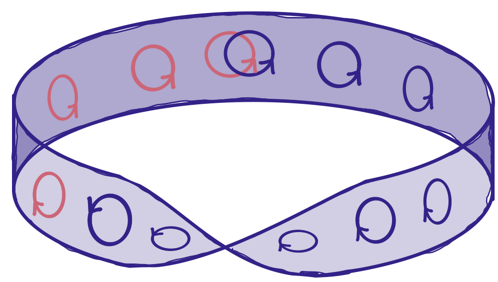
$$H_i(M, M-x) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong H_i(D^n, S^{n-1})$$

(AUSSCHN.)

$$\cong \tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} R & i=n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine „R-Orientierung" von M ist eine stetige Wahl von Erzeugern von $H_n(M, M-x) \cong R$. Für $R = \mathbb{Z}$ kommen an jedem Punkt x zwei verschiedene Erzeuger in Frage ($+1$ & -1) und eine „stetige Wahl" für alle x ist genau dann möglich, wenn M „anschaulich orientierbar" ist.





1. **Def.:** Eine *R-Orientierung* einer n-Mft. M ist eine Wahl von Erzeugern

$$M \ni x \longmapsto \xi_x \in H_n(M, M-x)$$

die stetig ist in folgenden Sinne:
Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x und ein Element

$$[M_U] \in H_n(M, M-U),$$

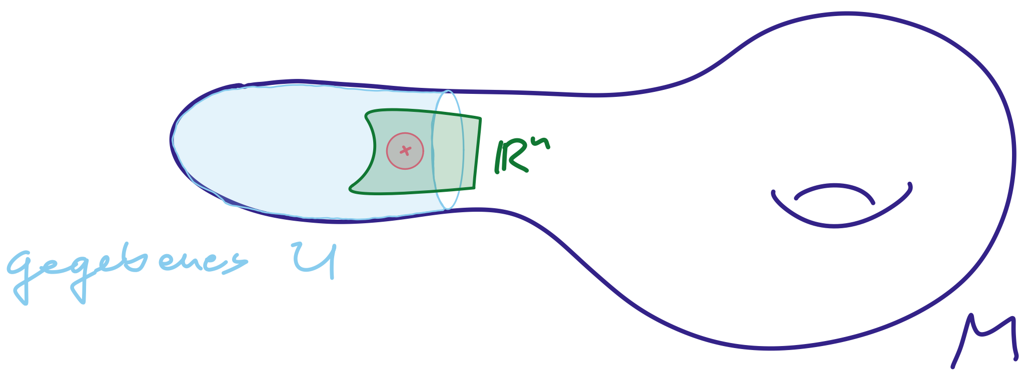
das für jedes $y \in U$ auf ξ_y abbildet:

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M-U) & \longrightarrow & H_n(M, M-y) \\ [M_U] & \longmapsto & \xi_y \end{array}$$

M ist *R-orientierbar*, falls eine solche Wahl existiert.

2. **Bemerkung:** Wir können durch Verkleinerung von U stets erreichen, dass gilt:

- $U \cong \mathbb{R}^n$
- $H_n(M, M-U) \cong R$
- $[M_U] \in H_n(M, M-U)$ Erzeuger.



3. Def.: Ist M R-orientiert und $U \subseteq M$ beliebige Teilmenge, so heißt ein Element

$$[M_U] \in H_n(M, M-U),$$

das für jedes $y \in U$ unter

$$H_n(M, M-U) \longrightarrow H_n(M, M-y)$$

auf ξ_y abbildet, R-Fundamentalklasse (FK) von M auf U.

Für $M = U$ heißt ein entsprechendes Element

$$[M] \in H_n(M)$$

R-Fundamentalklasse von M.

Wenn wir R nicht nennen, meinen wir $R = \mathbb{Z}$.

---

4. Verschwindungssatz:

Für die Homologie einer n-Mft. mit Koeffizienten in beliebiger abelschen Gruppe gilt:

(a) $H_i(M) = 0 \quad \forall i > n$

(b) $H_n(M_0) = 0$ für jede nicht-kompakte Komponente M_0 von M

Zum Beweis benötigen wir:

5. Satz vom kompakten Träger

X ein Raum, $\xi \in H_q X$.
Es gibt einen kompakten Unterraum $K \subseteq X$, sodass ξ im Bild von $H_q K \longrightarrow H_q X$ liegt.
Wir nennen K dann kompakten Träger von ξ.

Beweis:
Ist X Zellkomplex, so lässt sich ξ per Def. als Linearkombination endlich vieler q-Zellen $z_1, \dots, z_m$ darstellen. Wähle für K einen endlichen Unterkomplex, der diese Zellen enthält.
(Konstruiere K z.B. als $\bigcup_i \overline{z_i}$ vereinigt mit allen endlich vielen $(q-1)$-Zellen $z_{i1}, \dots, z_{im_i}$, die jeweils $\overline{z_i}$ schneidet, vereinigt mit allen endlich vielen $(q-2)$-Zellen die jeweils $\overline{z_{ij}}$ schneidet, usw.)

[Nachtrag/Korrektur 07.07.2025;
siehe auch Präzisierung/Ergänzung zu Top I, §8, Definition 4]

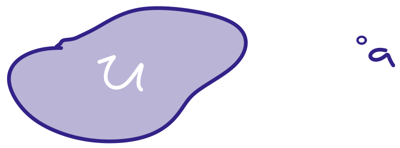
I. A. wähle zelluläre Approx. $f: X' \longrightarrow X$ und schreibe $\xi = f_* \xi'$. Ist dann K' kompakter Träger für ξ', so ist $K := f(K')$ kompakter Träger für ξ. $\square$

6. Lemma (Verschwindungssatz für offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$)

(a) Für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\tilde{H}_i(U) = 0$ $\forall i \geq n$.

(b) Für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}^n$, jedes $\xi \in \tilde{H}_{n-1}(U)$ gilt:

$$\xi = 0 \iff (j_a)_*(\xi) = 0 \text{ für } j_a : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus a$$
$$\text{für jedes } a \in \mathbb{R}^n \setminus U.$$



Beweis:

a: Sei $\xi \in \tilde{H}_i(U)$, $i \geq n$.
Sei $K \subseteq U$ ein kompakter Träger für ξ.

Falls K Unterkomplex von $\mathbb{R}^n$ (für irgendeine Zellstruktur auf $\mathbb{R}^n$):

Betrachte

$$H_{i+1}(\mathbb{R}^n, K) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_i(K)$$

Wegen $\tilde{H}_*(\mathbb{R}^n) = 0$ ist ∂ surjektiv.

Andererseits ist

$$C_i(\mathbb{R}^n, K) = 0 \quad \forall i > n \text{ (aus Dimensionsgründen)}$$

also $H_i(\mathbb{R}^n, K) = 0$ $\forall i > n$,

und es folgt $\tilde{H}_i(K) = 0$ $\forall i \geq n$.

Somit ist $\xi = 0$.

Im Allgemeinen:

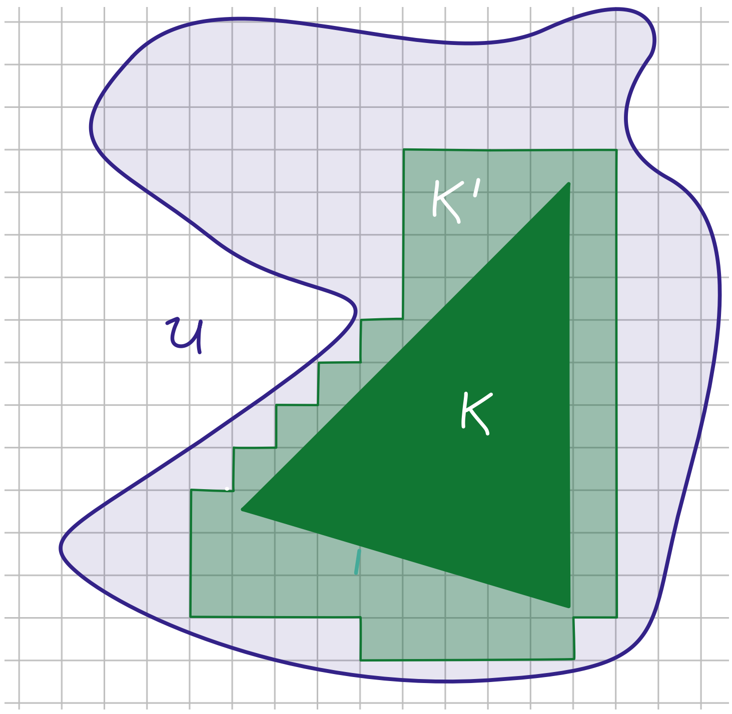
Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir auf $\mathbb{R}$ Zellstruktur wählen mit 1-Zellen der Form
$[n \cdot \varepsilon, (n+1) \cdot \varepsilon]$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Das induziert Zellstruktur auf $\mathbb{R}^n$.
Indem wir ε klein genug wählen, können wir endlichen Unterkomplex $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ finden mit

$$K \subseteq K' \subseteq U$$

(Abstand zu $\mathbb{R}^n \setminus U$ nimmt auf K Minimum an.)

Ersetze also K durch K'!



b ($\Leftarrow$):

Sei $\xi \in \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{U})$ mit $(j_a)_*(\xi) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$.

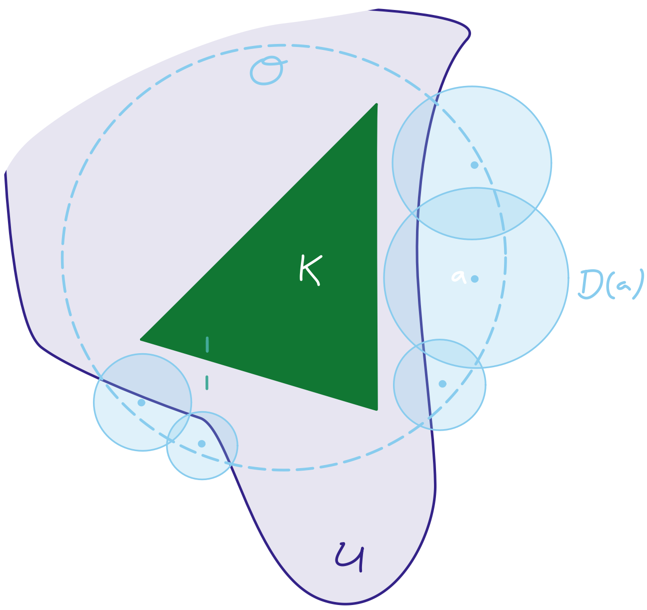
zz: $\xi = 0$.

Sei $K \subseteq \mathcal{U}$ kompakter Träger für ξ,

$\xi_K \in \widetilde{H}_{n-1}(K)$ gegeben mit $\xi_K \longmapsto \xi$.

Wähle offenen Ball $\mathcal{O}$ um K.

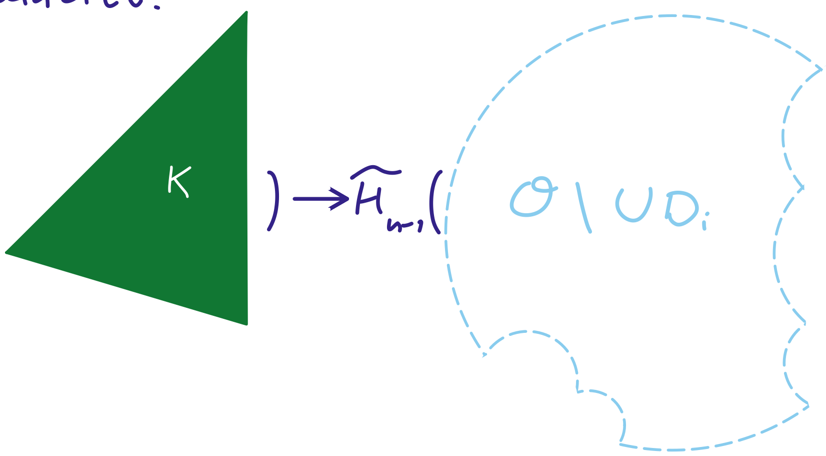
Überdecke $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{O}}$ durch abgeschlossene Bälle $D(a)$ um Punkte a, die K nicht schneiden. Weil $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{O}}$ kompakt ist, reichen endlich viele solcher Bälle $D_1, \dots, D_m$.



Es reicht zu zeigen: Das Bild von ξ_K in

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_1 \cup \dots \cup D_m)$$

verschwindet:



$$\widetilde{H}_{n-1}(K) \to \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} \setminus \textstyle\bigcup D_i) \to \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{U})$$

$$\xi_K \longmapsto 0 \longmapsto \xi$$

Um zu zeigen, dass Bild von ξ_K verschwindet, führen wir Induktion über m.

I. A.: $\widetilde{H}_*(\mathcal{O}) = 0$.

I. S. ($m-1 \rightsquigarrow m$): Betrachte MV-Sequenz zu

$$V := \left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right) \cup \left(\mathbb{R}^n - D_m\right):$$

$$\underbrace{\widetilde{H}_n(V)}_{\substack{=0 \\ \text{nach (a)}}} \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) \hookrightarrow \begin{array}{c} \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right) \\ \oplus \\ \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - D_m) \end{array} \longrightarrow \dots$$

Nun ist ...

... Bild von ξ_K in $\widetilde{H}_{n-1}\left(\mathcal{O} - \bigcup_{i=1}^{m-1} D_i\right)$ Null nach I.V.

... Bild von ξ_K in $\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_m)$ Null, denn D_m ist Ball um einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$, und ξ wird Null in

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{O} - D_m) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus a)$$

nach Voraussetzung.

Wegen Injektivität in Sequenz oben folgt also Behauptung. $\square$

Beweis des Verschwindungssatzes (Satz 4), Teil a:

Sei $i > n$.

Sei $\xi \in H_i(M)$, K kompakter Träger von ξ,

$\xi_K \in H_i(K)$ mit $\xi_K \longmapsto \xi$.

Da K kompakt, können wir K mit endlich vielen euklidischen Umgebungen $U_1, \dots, U_n$ überdecken.

$$K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m \subseteq M.$$

Es reicht zu zeigen:

$$H_i(U_1 \cup \dots \cup U_m) = 0.$$

IA $(m=1)$: $H_i(U_1) \cong H_i(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall i > 0$.

IS $(m-1 \rightsquigarrow m)$: Betrachte MV-Sequenz zu

$$V := U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$$
$$U := U_m \cong \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{H_i(U \cap V)}_{0} \to \underbrace{\begin{matrix} H_i U \\ \oplus \\ H_i V \end{matrix}}_{0 \text{ nach IV.}} \to H_i(U \cup V) \to \underbrace{H_{i-1}(\underbrace{U \cap V}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n})}_{0 \text{ nach Satz 6 (a)}}$$

Also ist $H_i(U \cup V) = 0$.

Beweis des Verschwindungssatzes (Satz 4), Teil b:

b: Sei nun M nicht kompakt, zusammenhgd., n-dim. Wir zeigen zunächst:

Beh: Die Abb. $H_n M \longrightarrow H_n(M, M-a)$ ist Nullabb. $\forall a \in M$.

Bew.: Sei $\xi \in H_n M$

Wir zeigen: $(i_a)_*(\xi) = 0 \quad \forall a \in M$,

$$H_n(M) \xrightarrow[(i_a)_*]{} H_n(M, M-a).$$

Sei dazu K kompakter Träger von ξ.

Da M selbst nicht kompakt ist, $\exists b \in M - K$.

Das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook] \arrow[d] & (K, K) \arrow[d] \\
M \arrow[r, hook] & (M, M-b)
\end{tikzcd}$$

zeigt: $(i_b)_*(\xi) = 0$.

Ist a ein beliebiger Punkt in einer euklidischen Umgebung von b, so verbinde a und b durch einen geraden Weg L und betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(M, M-a) \\
H_n(M) \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "(i_a)_*"] \arrow[drr, bend right, "(i_b)_*"'] & H_n(M, M-L) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & \\
 & & H_n(M, M-b)
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt: $(i_a)_*(\xi) = 0$.

Allgemeines $a \in M$ können wir durch endlich viele derartige Wegstücke mit b verbinden.

[...] $\triangle$

Zum Beweis von 6 reicht es angesichts des Satzes vom kompakten Träger zu zeigen:

$$H_n(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_\ell) = 0$$

für euklidische Umgebungen $\mathcal{U}_i$ in M.

IA: $\ell = 1$: klar, da $\mathcal{U}_1 \cong \mathbb{R}^n$.

IS: Sei wieder $V := \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_{\ell-1}$

$\mathcal{U} := \mathcal{U}_\ell$

und betrachte MV:

$$\underbrace{\begin{matrix} H_n(\mathcal{U}) \\ \oplus \\ H_n(V)\end{matrix}}_{=0\ (IV)} \longrightarrow H_n(\mathcal{U} \cup V) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{U} \cap V) \longrightarrow \begin{matrix} H_{n-1}(\mathcal{U}) \\ \oplus \\ H_{n-1}(V)\end{matrix}$$

Es reicht zu zeigen:

Beh: $\tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U} \cap V) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(V)$ ist injektiv.

Bew: Betrachte für beliebiges $a \in \mathcal{U} - \mathcal{U} \cap V$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \overset{\beta_V}{H_n(V, \mathcal{U}\cap V)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "v_*"] \arrow[dddd, bend left, "0"] & \overset{\alpha}{\tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}\cap V)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & \tilde{H}_{n-1}(V) \\
\overset{\gamma}{H_n(\mathcal{U}\cup V)} \arrow[r] \arrow[ddd, bend right] & \overset{v_*\beta_V - u_*\beta_{\mathcal{U}}}{H_n(\mathcal{U}\cup V, \mathcal{U}\cap V)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[ddd, bend right] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}\cap V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}\cup V) \\
\cdots \arrow[r] & \overset{\beta_{\mathcal{U}}}{H_n(\mathcal{U}, \mathcal{U}\cap V)} \arrow[u, "u_*"'] \arrow[r, two heads, "\partial"] \arrow[d, "(j_a)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "(j_a)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}) = 0 \\
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathcal{U}, \mathcal{U}-a) \arrow[r, two heads, "\partial"] \arrow[d, "\cong", "(\text{AUSSCHN.})"'] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}-a) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{U}) = 0 \\
H_n(M) \arrow[r, "0"] & H_n(M, M-a) & &
\end{tikzcd}$$

Alle Zeilen sind Abschnitte aus LES von Paaren. Alle vertikalen Pfeile sind durch Inklusionen induziert. Die Abbildung $\rightsquigarrow$ ist Null, da sie durch $H_n(M-a, M-a)$ faktorisiert.
Der horizontale Pfeil $H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M-a)$ ist Nullabb. wegen Beh. oben.

Sei nun $\alpha \in \tilde{H}_{n-1}(U \cap V)$ mit $i_* \alpha = 0$.
Zu zeigen ist: $\alpha = 0$.
Wegen Lemma 6 (b) reicht es, zu zeigen:

$$(j_a)_* \alpha = 0 \quad \in \tilde{H}_{n-1}(U-a).$$

Wähle dazu zunächst Urbilder von α:

$$\beta_V \in H_n(V, U \cap V)$$
$$\beta_U \in H_n(U, U \cap V)$$

Sei $\gamma \in H_n(U \cup V)$ Urbild von $v_* \beta_V - u_* \beta_U$.
Das Bild von $v_* \beta_V - u_* \beta_U$ in $H_n(U, U-a)$ ist Null, da $H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M-a)$ Nullabb. ist.
Das Bild von $v_* \beta_V$ in $H_n(M, M-a)$ ist Null, da $\rightsquigarrow$ Nullabb. ist.
Also ist das Bild von $u_* \beta_U$ in $H_n(U, U-a)$ Null, und Kommutativität zeigt: $(j_a)_* \alpha = 0$. $\square$

7. Satz (Existenz von FK)

Eine Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine FK, wenn sie kompakt und orientierbar ist.

8. Satz (Fundamentalklassen sind Erzeuger)

Sei M zshgd. Besitzt M eine R-FK, so ist $H_n(M; R) \cong R$.

9. Satz ($\mathbb{Z}$-Orientierbarkeit)

Für eine kompakte zshgd. n-Mft. gilt:

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \iff M \text{ orientierbar}$$

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong 0 \iff M \text{ nicht orientierbar}$$

Beweis zu Satz 7:

($\Rightarrow$) folgt aus Def. & Satz 4 (b)

($\Leftarrow$) Sei M orientierbar, $K \subseteq M$ kompakt.

Wir konstruieren zu einer gegebenen R-Orientierung

$$x \longmapsto \xi_x \in H_n(M, M-x)$$

eine R-FK $[M_K]$ von M auf K,

also $[M_K] \in H_n(M, M-K)$ derart, dass es für jedes $x \in K$ auf ξ_x abbildet.

(Der Satz ergibt sich dann durch Wahl von $K := M$.)

Nach Vor. existiert um jedes $y \in M$ eine offene euklidische Umgebung U und eine FK $[M_U] \in H_n(M, M-U)$ von M auf U. Da K kompakt ist, wird K von endlich vielen dieser Mengen überdeckt, sagen wir

$$U_1, \dots, U_\ell$$

mit FK $[M_1], \dots, [M_\ell]$.

Wir zeigen per Induktion nach ℓ:

(i) $H_i(M, M-K) = 0 \quad \forall i > n$

(ii) $\exists ! \, [M_K] \in H_n(M, M-K)$ mit gewünschter Eigenschaft

IA: $\ell = 1$ bedeutet: $K \subseteq U$ mit $U \cong \mathbb{R}^n$.

i: $H_i(M, M-K) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$

$$\underset{(\text{LES})}{\cong} \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - K) = 0 \quad \forall i > n \text{ nach Lemma 6a.}$$

ii: Definiere $[M_K]$ als Bild von $[M_U]$ unter $H_n(M, M-U) \longrightarrow H_n(M, M-K)$.
Das ist eine FK auf K [...].
Eindeutigkeit:
Ist $[M_K]'$ weitere FK auf K, so stimmen die Bilder von

$$[M_K], [M_K]' \in H_n(M, M-K) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - K)$$
$$H_n(M, M-x) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - x)$$

für alle $x \in K$ überein. Daher folgt aus Lemma 66: $[M_K] = [M_K]'$.

IS $(\ell-1 \rightsquigarrow \ell)$

Sei $K \subseteq \underbrace{U_1 \cup \dots \cup U_{\ell-1}}_{=: U} \cup \underbrace{U_\ell}_{=: V}$

Wir können K schreiben als Vereinigung $K = K_U \cup K_V$ mit K_U & K_V kompakt, $K_U \subseteq U$, $K_V \subseteq V$ [...].

Betrachte nun <u>relative</u> MV-Sequenz zur schnittigen Triade $(M - K_U \cap K_V, M - K_U, M - K_V)$ in M:

$$\cdots \to H_{n+1}(M, M - K_U \cap K_V) \xrightarrow{\partial} H_n(M, M-K) \xrightarrow[\binom{+}{+}]{(*)} \begin{matrix} H_n(M, M-K_U) \\ \oplus \\ H_n(M, M-K_V) \end{matrix} \xrightarrow{(+-)} H_n(M, M - K_U \cap K_V)$$

Wende IV an auf K_U, K_V und $K_U \cap K_V$.
Dann folgt i: $H_i(M, M-K) = 0 \quad \forall i > n$

und (*) ist injektiv.

Ferner $\exists$ FK $[M_{K_u}]$, $[M_{K_v}]$ und $[M_{K_u \cap K_v}]$;

wegen Eindeutigkeit

$$[M_{K_u}] \longmapsto [M_{K_u \cap K_v}]$$
$$[M_{K_v}] \longmapsto [M_{K_u \cap K_v}]$$

und somit

$$\begin{pmatrix} [M_{K_u}] \\ [M_{K_v}] \end{pmatrix} \xmapsto{(+\ -)} 0.$$

Exaktheit ~~liefert~~ also $[M_K] \in H_n(M, M-K)$;

Eindeutigkeit von $[M_K]$ folgt aus Injektivität von (*). $\square$

Beweis zu Satz 8:

Sei M zshgd., $x \in M$ beliebig. Betrachte

$$\underbrace{H_n(M-x)}_{0} \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{(j_x)_*} \underbrace{H_n(M, M-x)}_{\cong R}$$

nach Satz 4 (b), da $M-x$ nicht kompakt

Offenbar $(j_x)_*$ injektiv.

Besitzt M eine FK, so ist $(j_x)_*$ auch surjektiv. $\square$

Beweis zu Satz 9:

Sei M zshgd. & kompakt. Wissen bereits:

(a) $H_n(M;R) \overset{(j_x)_*}{\hookrightarrow} H_n(M, M-x; R) \cong R$ (siehe Beweis zu Satz 8),

daher für $R = \mathbb{Z}$:

$$H_n(M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{oder} \\ 0 \end{cases}$$

(b) $H_n(M) \cong \mathbb{Z} \overset{\text{Satz 7}}{\underset{+\text{ Satz 8}}{\Longleftarrow}} M$ orientierbar

N.z.z.: $H_n(M) \cong \mathbb{Z} \Longrightarrow M$ orientierbar

Sei also $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Dann hat $(j_x)_*$ für jedes $x \in M$ die Form $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n_x} \mathbb{Z}$ für ein $n_x \in \mathbb{Z}$.
Es reicht nun zu zeigen: $n_x \in \{\pm 1\}$ $\forall x$, denn dann definiert $\xi_x := (j_x)_*[M]$ für einen Erzeuger $[M]$ von $H_n(M)$ eine Orientierung.

Betrachte hierzu Koeffiziententheorem:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(M) \otimes \mathbb{Z}/\ell \arrow[r, hook] \arrow[d, "(j_x)_* \otimes \mathbb{Z}/\ell"'] & H_n(M; \mathbb{Z}/\ell) \arrow[r] \arrow[d, "(j_x)_*"] & \dots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(M, M-x) \otimes \mathbb{Z}/\ell \arrow[r, "\cong"'] & H_n(M, M-x; \mathbb{Z}/\ell) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/\ell \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cdot n_x"'] & H_n(M; \mathbb{Z}/\ell) \arrow[d, "(j_x)_*"', "\text{siehe a}"] \\
\mathbb{Z}/\ell \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_n(M, M-x; \mathbb{Z}/\ell)
\end{tikzcd}$$

Also muss $\cdot n_x$ auf $\mathbb{Z}/\ell$ injektiv sein, $\forall \ell$.
Daraus folgt: $n_x = \pm 1$. $\square$