

13. Hauben-Produkt

[cap product $\cap$]

R kommutativer Ring

M R -Modul

C_* Kettenkomplex von R -Modulen

$$(\quad)^\vee := \operatorname{Hom}_R(\quad, M)$$

1. Lemma: Es gibt einen eindeutigen Kettenmorphismus

$$\begin{aligned} \text{ev}: C_*^\vee \otimes_R C_* &\longrightarrow M \\ \text{mit } f \otimes x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f| = -|x| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(Hier ist M konzentriert in Grad 0.)

Beweis: $\textcircled{!}$

□

Insbesondere induziert ev Abb. auf Homologie.

In Grad 0 können wir folgende Komposition betrachten:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus H^p(C_*; M) \oplus H_p(C_*) & \xrightarrow{\quad} & M \\ \downarrow x & & \uparrow \text{ev} \\ & H_0(C_*^\vee \otimes C_*) & \end{array}$$

2. Def.: Für einen Raum X ist die **Auswertungs-paarung** die R -bilineare Abb.

$$\langle -, - \rangle : H^p(X; M) + H_p(X; R) \longrightarrow M$$

die wir erhalten, indem wir oben $C_* := C_*(X)$ wählen.

3. Notiz: In Notation von Lemma 10.8 ist

$$\langle \alpha, x \rangle = \omega(\alpha)(x).$$

(Aber Lemma 1 gibt uns nun auch eine Abb. auf Ebene von Komplexen.)

4. Notiz: Die Auswertungspaarung ist natürlich:

(a) Für jede Abb. $f: X \rightarrow Y$ gilt:

$$\langle f^* \alpha, x \rangle = \langle \alpha, f_* x \rangle$$

$$\forall \alpha \in H^p(Y; M), \quad x \in H_p(X; R).$$

(b) Für jede R -lineare Abb. $w: M \rightarrow N$

Kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; M) + H_p(X; R) & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & M \\ \downarrow w_* \times \text{id} & & \downarrow w \\ H^p(X; N) + H_p(X; R) & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & N \end{array}$$

- (U')

5. Satz & Def.:

Für jeden Raum X / jedes Paar (X, A) haben wir $\mathbb{R}$ -bilineare Abb.

$$\cap: H^p(X; M) \times H_q(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{q-p}(X; M)$$

$$\cap: H^p(X, A; M) \times H_q(X, A; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{q-p}(X; M)$$

$$\cap: H^p(X; M) \times H_q(X, A; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{q-p}(X, A; M)$$

derart, dass gilt:

(a) Für $A = \emptyset$ stimmen die Abb. überein.

(b) Das $\cap$ -Produkt ist natürlich:

Für jede Abb. $f: X \longrightarrow Y$ gilt:

$$\alpha \cap f_* x = f_*(f^* \alpha \cap x)$$

$$\forall \alpha \in H^p(Y; M), x \in H_q(X; \mathbb{R}).$$

"Projektionsformel"; analog im relativen Fall

(c) Im Fall $M = \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle \alpha \cup \beta, x \rangle = \langle \alpha, \beta \cap x \rangle \in \mathbb{R}$$

$$\text{für } \alpha \in H^{p-q}(X; \mathbb{R}), \beta \in H^q(X; \mathbb{R}), x \in H_p(X; \mathbb{R})$$

(d) Koeffizientenwechsel: Für jede $\mathbb{R}$ -lineare Abb.

$w: M \longrightarrow N$ kommutiert

$$H^p(X; M) \times H_q(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{q-p}(X; M)$$

$$\downarrow w_* \times \text{id}$$

$$H^p(X; N) \times H_q(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{q-p}(X; N)$$

$$\downarrow w_*$$

Ein solches Produkt wird im folgenden Beweis konstruiert. Wir nennen es **Haubenprodukt**.

Beweis:

Absoluter Fall ($A = \emptyset$)

Betrachte für Kettenkomplexe C, D :

$$\begin{aligned} \tau: C \otimes D &\xrightarrow{\cong} D \otimes C \\ c \otimes d &\mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c \end{aligned}$$

Sei i der Iso.

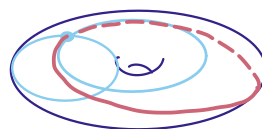
$$i: C(X) \otimes C(X) \xrightarrow{\cong} C(X+X)$$

aus Lemma 2.7.

Wähle eine zelluläre Approximierung $\tilde{\Delta}$ von der Diagonalabb. $\Delta: X \rightarrow X+X$.

(Δ selbst ist i.A. nicht zellulär, z.B.:

$$\Delta: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$



$$\begin{array}{ccccc} (C.X) \check{\otimes} C.X & \xrightarrow{\text{id} \otimes C.\tilde{\Delta}} & (C.X) \check{\otimes} C.(X+X) & \xrightarrow{\text{id} \otimes i^{-1}} & (C.X) \check{\otimes} C.X \otimes C.X \\ & \searrow \text{dashed} & & & \downarrow \text{id} \otimes \tau \\ & & & & (C.X) \check{\otimes} C.X \otimes C.X \\ & & & & \downarrow \text{ev} \otimes \text{id} \\ & & & & M \otimes C.X \\ & & & & \parallel \\ & & & & C.(X; M) \end{array}$$

n.

$$(\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}, C.X = C.(X; \mathbb{R}), (-) \check{\otimes} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(-, M))$$

Definiere $\cap$ als die induzierte Abb. auf Homologie:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{-p}(C_\bullet X^\vee) \oplus H_q(C_\bullet X) & \xrightarrow{x} & H_{q-p}(C_\bullet X^\vee \oplus C_\bullet X) \\
 \parallel & & \searrow H(\cap_\bullet) \\
 H^p(X; \mathcal{M}) \oplus H_q(X; \mathcal{R}) & \xrightarrow{\cap} & H_{q-p}(C_\bullet(X; \mathcal{M})) \\
 & & \parallel \\
 & & H_{q-p}(X; \mathcal{M})
 \end{array}$$

$\cap_\bullet$ in Formeln: Seien $\alpha \in (C_p X)^\vee$, $x \in C_q X$.

Dann ist

$$(\tilde{i}' C_q \tilde{\Delta})(x) = \sum_{\substack{a, b: \\ a+b=q}} \sum_i \gamma_{a,i} \oplus z_{b,i} \quad (*)$$

für gewisse $\gamma_{a,i} \in C_a X$ und $z_{b,i} \in C_b X$.

Das Diagramm definiert $\alpha \cap_\bullet x$ als

$$\alpha \cap_\bullet x = \sum_{\substack{a, b: \\ a+b=q}} (-1)^{a \cdot b} \sum_i \text{ev}(\alpha)(z_{b,i}) \cdot \gamma_{a,i}$$

$$= (-1)^{(q-p) \cdot p} \sum_i \alpha(z_{p,i}) \cdot \gamma_{q-p,i}$$

$$\nearrow \text{ev}(\alpha)(z_{b,i}) = 0 \text{ für } p \neq -b$$

zu c ($M = \mathbb{R}$): Schreibe für

$$\alpha \in (C_{p-q} X)^{\vee}, \quad \beta \in (C_q X)^{\vee}, \quad x \in C_p X$$

$$(i^{-1} \circ C_q \tilde{\Delta})(x) \text{ wie in } (*) \text{ oben. Dann ist:}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \cap x \rangle &= (-1)^{q \cdot (p-q)} \sum_i \langle \beta, z_{q,i} \rangle \cdot \langle \alpha, \gamma_{p-q,i} \rangle \\ &= \langle \alpha \times \beta, \Delta_* x \rangle \\ &= \langle \Delta^*(\alpha \times \beta), x \rangle = \langle \alpha \cup \beta, x \rangle \end{aligned}$$

zu b: gilt erst nach Übergang zu Homologie.

Wähle zelluläre Approximierungen $\tilde{f}$ von f ,
 $\tilde{\Delta}_x$ von Δ_x und $\tilde{\Delta}_y$ von Δ_y . Dann
 kommutiert

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_x} & X \times X \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \times \tilde{f} \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_y} & Y \times Y \end{array}$$

als auf Homotopie. Also induzieren

$$C_*(\tilde{f} \times \tilde{f}) \circ \tilde{\Delta}_x$$

und $C_*(\tilde{\Delta}_y \circ \tilde{f})$

dieselben Abb. auf Homologie.

Können hiermit ähnlich wie in c nachrechnen:

$$\begin{aligned} \alpha \cap f_* x &= (-1)^{p(q-p)} \sum_i \langle \alpha, f_* z_{p,i} \rangle \cdot f_* \gamma_{q-p,i} \\ f_*(f^* \alpha \cap x) &= f_* \left((-1)^{p(q-p)} \sum_i \langle f^* \alpha, z_{p,i} \rangle \cdot \gamma_{q-p,i} \right) \end{aligned}$$

☺ Nutze nun Notiz 4.

d: freiwillige ☺

Relative Fall:

Approximiere Δ so, dass A auf $A+A$ abgebildet wird. Dann erhalten wir insbesondere zelluläre Abb.

$$(X, A) \longrightarrow (X+X, A+X)$$

$$(X, A) \longrightarrow (X+X, X+A)$$

und somit

$$C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X+X, A+X) \cong C_*(X, A) \oplus C_*X$$

$$C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X+X, X+A) \cong C_*X \oplus C_*(X, A)$$

$$\left(\begin{array}{l} C_*(X+Y, X+B \cup A+Y) = C_*(X, A) \oplus C_*(Y, B) \\ - \text{vgl. Beweis zu Satz 9.3(a)} \end{array} \right)$$

Setze dies in obige Konstruktion ein $C \dots$].

□