

Künneth & Koeffizienten für Kohomologie

1. Satz (Künneth): X, Y topologische Räume
Mit Koeffizienten in einem Körper gilt:

Falls $H_i(X)$ für alle i endlich-dimensional ist,
so ist das Kreuzprodukt

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{x} H^*(X+Y)$$

ein Isomorphismus graduierter Ringe.

Allgemeiner gilt mit Koeffizienten in einem
HIR R :

Falls $H_i(X)$ für alle i endlich erzeugt ist, haben
wir für jeden Grad n eine natürliche K.e.S.

$$0 \rightarrow [H^*(X) \otimes H^*(Y)] \xrightarrow{x} H^n(X+Y) \rightarrow \bigoplus_{\substack{p,q: \\ p+q=n+1}} \text{Tor}(H^p X, H^q Y) \rightarrow 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche
Weise.

2. Bemerkung: Das Kreuzprodukt können wir nach §5
auch beschreiben als

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes H^*(Y) & \xrightarrow{x} & H^*(X+Y) \\ a \otimes b & \mapsto & \pi_x^* a \cup \pi_y^* b \end{array}$$

(Beweis: (ü))

3. Erinnerung: $\text{Ext}_R^1 := \text{Ext}_R^1$

Für Moduln M, M_i, N, N_i über einem HIR R gilt:

(a) $\text{Ext}_R(M, N) = 0$ falls M frei
oder N divisibel.

(b) $\text{Ext}_R(\bigoplus_i M_i, N) = \prod_i \text{Ext}_R(M_i, N)$

$\text{Ext}_R(M, \prod_i N_i) = \prod_i \text{Ext}_R(M, N_i)$

(c) $\text{Ext}_R(R/d, N) = N/dN$ für $d \in R \setminus 0$.

[siehe HA D4 Satz 3, 4 & M5, Korollar 5, 7]

4. Satz (Universelles Koeffiziententheorem)

X topologischer Raum

Für (Ko)Homologie mit Koeffizienten in einem Körper k haben wir Isomorphismen

$$H^n(X) \cong H_n(X)^\vee$$

$$(\text{also } H^n(X; k) \cong \text{Hom}(H_n(X; k), k))$$

Ist allgemeiner R ein HIR, M ein R -Modul,
so haben wir für jedes n eine natürliche K.e.S.

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), M) \rightarrow H^n(X; M) \xrightarrow{\omega} \text{Hom}(H_n(X), M) \rightarrow 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

5. Beispiel / (ii)

Sei $R = \mathbb{Z}$, und seien alle $H_i(X)$ endlich erzeugt.

Schreibe $H_i(X) = \mathbb{Z}^{\oplus n_i} \oplus T_i$
↑ Torsion

Dann folgt aus dem Theorem:

$$H^i(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n_i} \oplus T_{i-1}$$

6. Beispiel / (ii)

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$$

Beweisstruktur:

$$\text{alg. Künneth-Theorem} \Rightarrow \begin{cases} \text{Künneth für } H_* & (\S 6) \\ \text{Koeffiz. für } H_* & (\S 6) \\ \text{Künneth für } H^* & \underline{\text{hier}} \end{cases}$$

(Satz 6.7)

alg. Koeffizienten-Theorem $\Rightarrow$ Koeffiz. für H^* unten

7. Beweis alg. Künneth $\Rightarrow$ Künneth für H^*

Spezialfall: X hat (zelluläre Approximierung mit)
endlich viele Zellen in jeder Dimension

Aus dem alg. Künneth-Theorem erhalten wir k.e.S.

$$0 \rightarrow \left[H_*(C.X)^\vee \otimes H_*(C.Y)^\vee \right]_{-n} \xrightarrow{x} H_{-n}(C.X)^\vee \otimes (C.Y)^\vee \rightarrow \text{Tor}(\dots)$$

Unter unserer Voraussetzung ist $C.X$ in jedem Grad frei von endlichem Rang. Also ist nach Lemma 9.1 die Abb.

$$\mu: (C.X)^\vee \otimes (C.Y)^\vee \longrightarrow (C.X \otimes C.Y)^\vee$$

ein Isomorphismus, und somit

$$H_{-n}(C.X)^\vee \otimes (C.Y)^\vee \cong H_{-n}(\underbrace{(C.X \otimes C.Y)^\vee}_{C_*(X+Y)}) = H^n(X+Y).$$

(ii) Identifiziere andere Terme der k.e.S.

Idee für allgemeinen Fall:

Ist C_* Komplex mit $C_i = 0 \quad \forall i < 0$ und

$H_i(C_*)$ endlich erzeugt $\forall i$,

so existiert eine freie Auflösung

$$\tilde{C}_* \xrightarrow{\sim} C_* \quad (\text{Quasi-Isomorphismus})$$

mit $\tilde{C}_i$ frei und endlich erzeugt $\forall i$

(induktive Verallgemeinerung der freien Auflösung eines Moduls).

Wende dies an auf $C_\bullet := C_\bullet X$. Dann ist

$$H_i(\tilde{C}) = H_i(X)$$

$$H^i(\tilde{C}) = H^i(X)$$

und $\tilde{C}_i$ für alle i frei und endlich erzeugt.

Verfahre nun wie im Spezialfall. $\square$

8. Lemma: R kommutativer Ring.

Für jeden R -Modul M und Kettenkomplex $C_\bullet$ über R haben wir einen wohldef. Homomorphismus

$$H^n(C_\bullet, M) \xrightarrow{\omega} \text{Hom}_R(H_n(C_\bullet), M)$$

mit
$$[f] \mapsto (C_x \mapsto f(x))$$

$$f: C_n \rightarrow M$$

Beweis: (ii) $\square$

9. Satz: Koeffiziententheorem der homologischen Alg.

Sei R ein HIR, M ein R -Modul,

$C_\bullet$ ein Kettenkomplex über R mit C_i frei $\forall i$.

Dann haben wir für jedes n eine natürliche k.e.s.

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R(H_{n-1}(C_\bullet), M) \rightarrow H^n(C_\bullet, M) \xrightarrow{\omega} \text{Hom}_R(H_n(C_\bullet), M) \rightarrow 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Beweis: ganz analog zu Satz 6.7. $\square$