

§9: Das Kelch-Produkt ○

[cup-product]

Hier: H^* zelluläre Kohomologie mit Koeffizienten
in einem kommutativen Ring R , $M := R$

$$C_* X := C_*(X; R)$$

$$(C_* X)^\vee := C_*(X; R)^\vee \quad \text{bzgl. } M = R \quad (\S 8)$$

$$- \otimes - := - \otimes_R -$$

$$H^* X := H^*(X; R)$$

usw.

Bereits gesehen: Für Räume X, Y haben wir
Isomorphismen

$$(\times) \quad C_* X \oplus C_* Y \cong C_*(X + Y)$$

[§2, Lemma 7], und daraus erhalten wir

$$H_* X \times H_* Y \xrightarrow{\times} H_*(X + Y)$$

(§6). Analog definieren wir hier:

$$H^* X \times H^* Y \xrightarrow{\times} H^*(X + Y)$$

Dazu brauchen wir:

1. **Lemma:** Für Kettenkomplexe C_* , D_* (über R)
haben wir einen kanonischen natürlichen
Homomorphismen

$$C_*^\vee \otimes D_*^\vee \xrightarrow{\mu} (C_* \otimes D_*)^\vee.$$

Er ist ein Iso, falls C_* in allen Graden
frei von endlichem Rang.

$$\checkmark(-) = \text{Hom}_R(-, R)$$

Beweis: Definiere zunächst

$$\mu_{p,q}: (C_{-p})^\vee \otimes (D_{-q})^\vee \longrightarrow (C_{-p} \otimes D_{-q})^\vee$$

$$f \otimes g \mapsto (a \otimes b \mapsto (-1)^{p \cdot q} f(a) \cdot g(b))$$

$p = |a|$
 $-q = |g|$

Setze $\mu_{p,q}$ auf den übrigen Summanden von $(C_\bullet \otimes D_\bullet)_{p+q}$ durch Null fort.

$$\mu_{p,q}: (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{p+q} \longrightarrow (C_{-p} \otimes D_{-q})^\vee$$

Definiere schließlich

$$\mu_n: \sum_{\substack{p,q: \\ p+q=n}} (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n \longrightarrow [(C_\bullet \otimes D_\bullet)^\vee]_n$$

⊆ μ definiert einen Kettenmorphismus.

Seien dazu $f \in (C^\vee)_{|f|} = \text{Hom}(C_{-|f|}, R)$, $a \in C_{|a|}$
 $g \in (C^\vee)_{|g|} = \text{Hom}(C_{-|g|}, R)$, $b \in C_{|b|}$

$$d^\vee \mu(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|a \otimes b|} \mu(f \otimes g)(d(a \otimes b))$$

$$= (-1)^{|f \otimes g|} \mu(f \otimes g)(da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db)$$

[Korrekturen 26.05.25]

$$= (-1)^{|a|+|b|} \begin{cases} (-1)^{|da| \cdot |g|} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|a|} \cdot (-1)^{|a||g|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|a|+|b|+|f||g|} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } \dots \\ (-1)^{|a|+|b|+|f|+|f||g|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|f||g|+|f|+|g|+1} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f||g|+|g|+1} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mu(d(f \otimes g))(a \otimes b) &= \mu(d^{\vee} f \otimes g + (-1)^{|f|} f \otimes d^{\vee} g)(a \otimes b) \\
&= \begin{cases} (-1)^{|a||g|} (d^{\vee} f)(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f|} \cdot (-1)^{|a| \cdot |d^{\vee} g|} f(a) \cdot (d^{\vee} g)(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{|a||g|} \cdot (-1)^{|a|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots\dots \\ (-1)^{|f|} \cdot (-1)^{|a| \cdot |d^{\vee} g|} \cdot (-1)^{|b|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{(|f|+1)|g|+|f|+1} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots\dots \\ (-1)^{|f|+|f|(|g|+1)+|g|+1} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{|f| \cdot |g|+|g|+|f|+1} \cdot f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f| \cdot |g|+|g|+1} \cdot f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Letzte Aussage des Lemmas lässt sich gradeweise beweisen. Sie ist für

$$C_{\bullet} = (R \text{ konzentriert in einem Grad})$$

klar und folgt daraus und aus Verträglichkeit von μ mit direkten Summen. $\square$

2. Def.: X, Y Räume. Das Kreuzprodukt auf Homologie ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc}
 H_* X \oplus H_* Y & \xrightarrow{x} & H_*(X+Y) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H_*(C_* X) \oplus H_*(C_* Y) & & H_*(C_*(X+Y)) \\
 \searrow \scriptstyle (\S 6) \quad x & & \nearrow \scriptstyle \cong \quad (*)_* \\
 & H_*(C_*(X) \otimes C_*(Y)) &
 \end{array}$$

Das Kreuzprodukt auf Kohomologie ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc}
 H^* X \oplus H^* Y & \xrightarrow{x} & H^*(X+Y) \\
 \parallel & & \parallel \\
 H^*(C^* X) \oplus H^*(C^* Y) & & H^*(C^*(X+Y)) \\
 \searrow \scriptstyle x \quad (\S 6) & & \nearrow \scriptstyle \cong \quad (*)^* \\
 & H^*(C^* X \vee C^* Y) \xrightarrow{\mu} H^*(C^*(X) \otimes C^*(Y)) &
 \end{array}$$

3. Satz: R kommutativer Ring,
 $(X, A), (Y, B)$ Raumpaare

(a) Obige Konstruktion liefert R -bilineare Abb.

$$x: H_p X \times H_q Y \longrightarrow H_{p+q}(X+Y)$$

$$x: H_p(X, A) \times H_q(Y, B) \longrightarrow H_{p+q}(X+Y, X+B \cup A+Y)$$

bzw.

$$x: H^p X \times H^q Y \longrightarrow H^{p+q}(X+Y)$$

$$x: H^p(X, A) \times H^q(Y, B) \longrightarrow H^{p+q}(X+Y, X+B \cup A+Y)$$

für (Ko) Homologie mit Koeff. in R .

(b) Diese Abb. sind natürlich in beiden Komponenten.

(c) Für die Vertauschungsabb.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau: X+Y & \longrightarrow & Y+X \\
 (x, y) & \mapsto & (y, x)
 \end{array}$$

Kommutieren die folgenden beiden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 (a, b) \quad H_p X \times H_q Y & \xrightarrow{x} & H_{p+q}(X+Y) \\
 \downarrow & & \downarrow \cong \tau_* \\
 (-1)^{p \cdot q} (b, a) \quad H_p Y \times H_q X & \xrightarrow{x} & H_{p+q}(Y+X)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (-1)^{p \cdot q} (b, a) \quad H^p X \times H^q Y & \xrightarrow{x} & H^{p+q}(X+Y) \\
 \uparrow & & \uparrow \cong \tau^* \\
 (a, b) \quad H^p Y \times H^q X & \xrightarrow{x} & H^{p+q}(Y+X)
 \end{array}$$

Beweis:

(a) klar für $X \& Y$ — ein Homomorphismus

$$H^p X \oplus H^q Y \longrightarrow H^{p+q}(X+Y)$$

ist das Gleiche wie eine bilineare Abb.

$$H^p X \times H^q Y \longrightarrow H^{p+q}(X+Y).$$

Für (X, A) und (Y, B) müssen wir in Konstruktion den Iso (*) durch den Iso

$$C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B) \cong C_*(X+Y, X+B \cup A+Y)$$

optional (ü):

diesen allgemeineren Iso aus (*) herleiten

Hinweise dazu: Folgere aus

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & CA \otimes CB & \longrightarrow & CX \otimes CB & \longrightarrow & C(X, A) \otimes CB \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & CA \otimes CY & \longrightarrow & CX \otimes CY & \longrightarrow & C(X, A) \otimes CY \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & CA \otimes C(Y, B) & \longrightarrow & CX \otimes C(Y, B) & \longrightarrow & C(X, A) \otimes C(Y, B) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

eine K.e.S.:

$$0 \rightarrow \text{pushout} \left(\begin{array}{ccc} CA \otimes CB & \rightarrow & CX \otimes CB \\ \downarrow & & \downarrow \\ CA \otimes CY & \rightarrow & CX \otimes CY \end{array} \right) \rightarrow \underbrace{CX \otimes CY}_{\cong C(X \times Y)} \rightarrow C(X, A) \otimes C(Y, B) \rightarrow 0$$

$\cong$ $C(X \times B \cup A \times Y)$ $\cong$ $C(X \times Y)$

vergleiche Beweis zu Mayer-Vietoris

(b) klar aus Konstruktion

(c) Die Zellen von $X \times Y$ haben die Form
 $D^{p+q} \cong D^p \times D^q \xrightarrow{j \times k} X \times Y$

Auf den Summanden von $C_*(X \times Y)$ der zu einer solchen Zelle gehört ist $C_*(\tau)$ gegeben durch Multiplikation mit

$$\deg \left(S^{p+q} \xrightarrow{\tau_{p,q}} S^{p+q} \right)$$

$$(s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q) \mapsto (t_1, \dots, t_q, s_1, \dots, s_p),$$

wobei wir hier Homöomorphismen

$$S^{p+q} \cong S^1 \wedge \dots \wedge S^1, \quad S^1 \cong \frac{I}{\partial I}$$

für die Schreibweise in Koordinaten wählen.

Beh: $\deg(\tau_{p,q}) = (-1)^{p \cdot q}$

Bew.:

$$\bullet \deg \left(\begin{array}{ccc} S^1 \wedge S^1 & \xrightarrow{\tau_{1,1}} & S^1 \wedge S^1 \\ (s, t) & & (t, s) \end{array} \right) = -1$$

z.B. durch explizite Homotopie zu

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\quad} & S^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, -z) \end{array}$$

- optionale (i).

- $\deg(\text{id} \wedge f: S^1 \wedge S^n \longrightarrow S^1 \wedge S^n)$
 $= \deg(f: S^n \longrightarrow S^n)$, für beliebiges f
 – $(S^1 \wedge -)$ ist Einhängung, und $\deg$
 per Konstruktion mit Einhängung
 verträglich.
- $\deg(f \wedge \text{id}: S^n \wedge S^1 \longrightarrow S^n \wedge S^1)$
 $= \deg(f: S^n \longrightarrow S^n)$, für beliebiges f
 – lässt sich auf vorherige Aussage
 zurückführen; betrachte dazu

$$\begin{array}{ccc} S^{n+1} & \xrightarrow{\tau_{n,1}} & S^{n+1} \\ f \wedge \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \wedge f \\ S^{n+1} & \xrightarrow{\tau_{n,1}} & S^{n+1} \end{array}$$

- $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g \quad (\text{Top I})$

Ü Schreibe nun $\tau_{p,q}$ als Komposition von
 beidseitigen Einhängungen von $\tau_{1,1}$,
 um Beh. zu erhalten. $\triangle$

Also kommutiert Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} C_p X \times C_q Y & \xrightarrow{(*)} & C_{p+q}(X+Y) & & \\ \downarrow (x,y) & & \downarrow & & C_*(\tau) \\ (-1)^{p \cdot q} C_q Y \times C_p X & \xrightarrow{(*)} & C_{p+q}(Y+X) & & \end{array}$$

und daraus folgt (c). $\square$

4. Def.: Das **Kelch-Produkt** auf Kohomologie mit Koeff. in R

$$U: H^p X \times H^q X \xrightarrow{U} H^{p+q} X$$

bzw.

$$U: H^p(X, A) \times H^q(X, B) \xrightarrow{U} H^{p+q}(X, A \cup B)$$

ist gegeben durch Komposition des Kreuzprodukts mit Δ^* , für

$$\Delta: X \xrightarrow{+} X + X \xrightarrow{(+, +)}$$

$$\begin{array}{ccc} H^p X \times H^q X & \xrightarrow{U} & H^{p+q} X \\ & \searrow \times & \nearrow \Delta^* \\ & H^{p+q}(X+X) & \end{array}$$

5. Satz X Raum, $H^* X := \bigoplus_p H^p X$ (Koeff. in R).

Das U -Produkt macht $H^* X$ zu einem graduier-kommutativen graduerten Ring. Das heißt insbesondere:

- Für $a \in H^p X$, $b \in H^q X$ ist $a \cup b \in H^{p+q} X$
- $a \cup b = (-1)^{p \cdot q} b \cup a$ für $a \in H^p X$
 $b \in H^q X$

Das 1-Element in $H^0 X$ ist gegeben durch das Bild von $1 \in R$ unter

$$\begin{array}{ccc} R \cong H^0(\text{pt}) & \xrightarrow{\pi^*} & H^0(X) & (X \xrightarrow{\pi} *) \\ 1 \cong [\text{pt}] & & & \end{array}$$

Ferner ist für $f: X \rightarrow Y$ die induzierte Abb.

$$H^* X \xleftarrow{f^*} H^* Y$$

ein Ringhomomorphismus.

Beweis:

(ii) Führe alle Aussagen auf Satz 3 zurück. $\square$