5. Faserungen

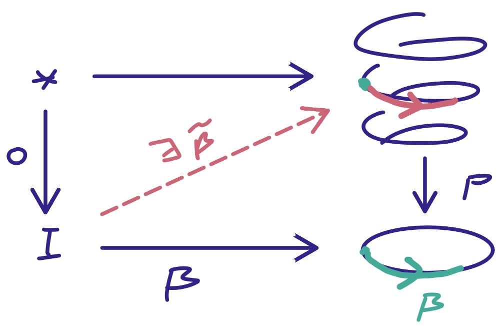
1. Def.: Eine (Hurewicz-)Faserung ist eine Abbildung $p: E \longrightarrow B$, die bezüglich jeder Abb. $Y \xrightarrow{f} E$ die Homotopiehochhebungseigenschaft (HH) besitzt:

jede Homotopie H mit Ziel B und Anfang $p \circ f$ lässt sich zu einer Homotopie $\tilde{H}$ mit Ziel E hochheben, sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{H}"'] \arrow[ddr, bend right, "H"'] & & E \arrow[d, "p"] \\
& E^I \arrow[ur] \arrow[d, "p^I"] & B \\
& B^I \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\quad \text{bzw.} \quad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "\forall H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

2. Bsp.: (HH) bzgl. $* \xrightarrow{e} E$ besagt:
jeder Weg in B in Anfang $p(e)$ lässt sich hochheben zu einem Weg in E mit Anfang e.

3. Bsp.: Überlagerungen sind Faserungen:
- HH bzgl. $* \xrightarrow{e} E$: Einführung
[Skript Varghese WS2023/24: Lemma 14.2]



- HH $\forall f$ gilt auch vgl. [Laures-Szymik]

Wir werden allgemeiner sehen.

4. Satz: (Numerable) Faserbündel sind Faserungen.

⚠ Aber nicht alle Faserungen sind Faserbündel.

Wir werden außerdem sehen:

5. Satz: Faserfaktorisierung
Jede Abb. lässt sich faktorisieren in eine Homotopieäquivalenz gefolgt von einer Faserung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & Y \\ & Ef \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

6. Satz (Konstruktionen mit Faserungen)
(a) Kompositionen von Faserungen sind Faserungen.
(b) Faserungen sind stabil unter Pullbacks

$$\left.\begin{array}{ll} E \overset{p}{\twoheadrightarrow} B & \text{Faserung} \\ C \longrightarrow B & \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow C \times_B E \twoheadrightarrow C \quad \text{Faserung}$$

$$\begin{tikzcd} C \times_B E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ C \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Beweis: Dual zum Beweis von Satz 4.4 (a) & (b).
(?) $\square$

7. Satz: Ist $A \overset{i}{\rightarrowtail} X$ Kofaserung, so ist für jeden Raum B
$B^A \overset{B^i}{\twoheadleftarrow} B^X$ eine Faserung.

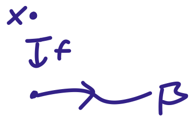
Abbildungswegeraum

— dual zum Abbildungszylinder

8. Def.: Abbildungswegeraum Ef von $X \xrightarrow{f} Y$ ist das Pullback

$$\begin{tikzcd} Ef := Y^I \times_Y X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^I \arrow[r, "ev_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

konkret: $Ef = \{ (\beta, x) \mid x \in X,\ \beta \text{ Weg in } Y \text{ mit Anfang } f(x) \}$



9. Notiz:

(a) Die Inklusion $X \xrightarrow{i_c} Ef$, $x \longmapsto (c_{fx}, x)$ ist eine

konstanter Weg in fx

Homotopieäquivalenz und Retrakt mit Homotopieinversem und Retraktion

$$X \xleftarrow{\pi_X} Ef, \quad x \longmapsfrom (\beta, x)$$

(b) Die Auswertung am Endpunkt $ev_1 : Ef \longrightarrow Y$, $(\beta, x) \longmapsto \beta(1)$ ist eine Faserung.

Beweis des Faktorisierungssatzes 5 mit Hilfe von Notiz 9:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_c"', "\simeq"] & & Y \\ & Ef \arrow[ur, "ev_1"'] & \end{tikzcd}$$

$x \in X$, $x \longmapsto (c_{fx}, x) \longmapsto c_{fx}(1) = fx$

$\square$

Beweis zu Notiz 9:

a: $\pi_X \circ i_c = \mathrm{id}$

$i_c \circ \pi_X \simeq \mathrm{id}$: $\quad Ef \times I \longrightarrow Ef$

$$((\beta, x), t) \longmapsto (\underbrace{„\beta|_{[0,t]}“}_{s \mapsto \beta(s \cdot t)}, x)$$

b: Sei

$$u \longmapsto (\beta_u, x_u)$$

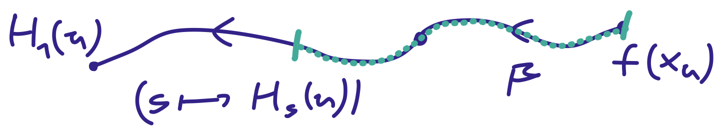
$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & Ef \arrow[d, "ev_1"] \\
U \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Für jedes $u \in U$ ist $H_0(u) = \beta_u(1)$.

Def. $\widetilde{H} : U \times I \longrightarrow Ef$

$$(u, t) \longmapsto (\underline{(s \mapsto H_s(u))|_{[0,t]} * \beta_u}, x_u)$$

$$\|$$



- $\widetilde{H}(u,t) \in Ef$ ✓
- $\widetilde{H}(u,0) = (\beta_u, x_u)$ ✓
- $ev_1(\widetilde{H}(u,1)) = H_1(u)$ ✓

$\square$

Weghebeabbildung

Idee: $E \twoheadrightarrow B$ Faserung

$\Longleftarrow$ „alte Wege lassen sich gemeinsam hochheben"

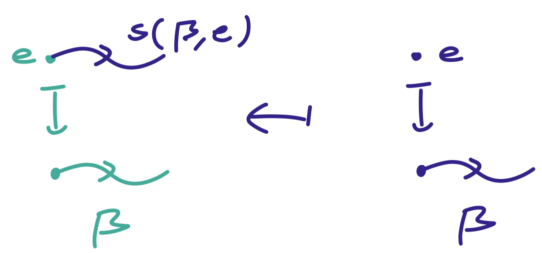
10. Def.: Eine Weghebeabb. für $E \xrightarrow{p} B$ ist eine Abb.

$$E^I \xleftarrow{s} E_p$$

mit $s(\beta,e)(0) = e$

und $p \circ s(\beta,e) = \beta \qquad \forall\, (\beta,e) \in E_p$.

Konkret: $s(\beta,e)$ ist Lift von β mit Anfang e.



abstrakt: s ist ein Schnitt der kanonischen Abb.

$$\begin{aligned} E^I &\xrightarrow{(p^I,\, ev_0)} E_p \\ \beta &\longmapsto (p\circ\beta,\ \beta(0)) \end{aligned}$$

11. Satz: Für eine Abb. $E \xrightarrow{p} B$ sind äquivalent:

1. p ist eine Faserung
2. p hat HH bzgl. $\begin{aligned} E_p &\longrightarrow E \\ (\beta,e) &\longmapsto e \end{aligned}$
3. Für p existiert eine Weghebeabb.

Beweis: analog zu 3 $\Leftarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 5 in Satz 4.12

Zum Beispiel $(2 \Rightarrow 1)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddrr, bend right, "H"'] & & & E \arrow[dd, "p"] \\
& E_p \arrow[urr] \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & E^I \arrow[ur, "ev_0"'] \arrow[d, "p^I"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\text{Pullback}}"] & \\
& & B^I \arrow[r, "ev_0"'] & B
\end{tikzcd}$$

- - - -> existiert wegen UE des Pullbacks E_p

- - - -> existiert nach Voraussetzung 2. $\square$

Beweis zu Satz 7:

Sei $A \xrightarrow{i} X$ Kofaserung, B beliebiger Raum. Dann ist nach Satz 4.12 M_i Retrakt von $X \times I$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\text{Pushout}}"] & A \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "i \times id"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "i_0"'] & M_i \arrow[dr, "j"'] & \\
& & X \times I \arrow[ul, bend right, "r"']
\end{tikzcd}$$

mit $r \circ j = id$

Wende $B^{(\,)}$ an:

$$\begin{tikzcd}
B^A & (B^A)^I \arrow[l, "ev_0"'] & \\
B^X \arrow[u, "B^i"] & B^{M_i} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dr, bend left, "B^r"] & \\
& & (B^X)^I \arrow[ul, "B^j"] \arrow[uul, bend right, "(B^i)^I"'] \arrow[ull, bend left, "ev_0"]
\end{tikzcd}$$

$B^{(\,)}$ verwandelt Pushouts in Pullbacks

(→ Übung). Also ist

$$B^{\mu_i} \cong E(B^i)$$

$$B^{j} = (ev_0, (B^i)^I)$$

Aus $r \circ j = id$ folgt $B^j \circ B^r = id$.

Also ist B^r eine Wegheb eabb. für B^i.

Somit ist $\underset{f\circ i}{B^A} \xleftarrow[\leftarrow\!\shortmid]{B^i} \underset{f}{B^X}$ eine Faserung (Satz 11).

$\square$