15. Satz: Seien $A \xrightarrow{i} X$ und $A \xrightarrow{j} Y$ Kofaserungen. Dann ist jede Abb.

$$f : (X, i) \longrightarrow (Y, j) \quad \text{unter } A,$$

die eine gewöhnliche Homotopieäquivalenz ist, eine Homotopieäquivalenz rel A.

Hilfslemma 1:

Sei $A \xrightarrow{i} X$ eine Kofaserung. Zu jedem $f : (X, i) \longrightarrow (X, i)$ mit $f \simeq id$ in Top $\exists\ k : (X, i) \longrightarrow (X, i)$ mit $k \circ f \simeq id$ rel A.

Beweis: vorherige Vorlesung.

Hilfslemma 2:

Seien $A \xrightarrow{i} X$ und $A \xrightarrow{j} Y$ Kofaserungen, $f : (X, i) \longrightarrow (Y, j)$ und $X \longleftarrow Y : g$ mit $g \circ f \simeq id$ in Top.
Dann existiert $(X, i) \longleftarrow (Y, j) : \tilde{g}$ mit $\tilde{g} \circ f \simeq id$ rel A.

Beweis:

Homotopie $g \circ j = g \circ f \circ i \rightsquigarrow i$

Schritt 1:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & X^I \arrow[d, "ev_0"] \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\
X \arrow[rr, shift left, "f"] & & Y \arrow[ll, shift left, "g"]
\end{tikzcd}$$

$g_1 :=$ Ende dieser Homotopie erfüllt $g_1 \circ j = i$.

Also $(X, i) \xleftarrow{g_1} (Y, j)$ mit $g_1 \circ f \simeq id$ in Top.

Schritt 2:

Wende Hilfslemma 1 an auf

$$g_1 \circ f : (X,i) \longrightarrow (X,i).$$

Erhalte $k : (X,i) \longrightarrow (X,i)$ mit $k \circ g_1 \circ f \simeq id$ rel A.

Wähle also $\tilde{g} := k \circ g_1$. $\triangle$

Beweis von Satz 15:

Sei nun $f : (X,i) \longrightarrow (Y,j)$ gewöhnliche HÄ'.
Nach Hilfslemma 2 existiert

$$(X,i) \longleftarrow (Y,j) : g$$

mit $g \circ f \simeq id$ rel A.
Da g Homotopieinverses zu f, ist auch g eine gewöhnliche HÄ'. Nach Hilfslemma 2 (angewendet auf „f" $:= g$) existiert

$$h : (X,i) \longrightarrow (Y,j)$$

mit $h \circ g \simeq id$ rel A.
Also ist g HÄ rel A

(übliche Trick: $h \simeq_A h \circ g \circ f \simeq_A f$),

also ist f HÄ rel A

(übliche Trick: $f \circ g \simeq_A h \circ g \simeq_A id$) . $\square$

Anhang II: Homotopie von Paaren

Ein Paar (X, A) ist ein Raum X mit einem Unterraum A. Eine Abb. von Paaren

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

ist eine Abb. $f: X \longrightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$.

16. Def.: Eine Homotopie von Paaren von (X, A) nach (Y, B) ist eine Homotopie

$$H: I \times X \longrightarrow Y,$$

die für jedes $t \in I$ eine Abb. von Paaren

$$H_t: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

definiert.

Zwei Abb. von Paaren sind homotop, wenn ...

Eine Homotopieäquivalenz von Paaren ist...

17. Satz: Seien die Inklusionen $i: A \longrightarrow X$ und $j: B \longrightarrow Y$ Kofaserungen, und sei

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

eine Abb. von Paaren derart, dass

$$f: X \longrightarrow Y$$

und $\quad f|_A: A \longrightarrow B$

gewöhnliche Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist f bereits eine Homotopieäquivalenz von Paaren.

⚠ Satz 15 ist nicht der Spezialfall $B = A$, $f|_A = \mathrm{id}$ von Satz 17.
(Satz 17 liefert z.B. kein Homotopieinverses g mit $g|_A = \mathrm{id}$, sondern nur mit $g(A) \subseteq A$.)

Beweis zu Satz 17 „ähnlich" wie Beweis von Satz 15.