3. Lokal kompakt erzeugte schwach-Hausdorff-Räume*

Für viele Zwecke ist das Exponentialgesetz aus §2 ausreichend. Insbesondere können wir eine Homotopie wahlweise als Abb.

$$X \times I \longrightarrow Y$$

oder

$$X \longrightarrow \underline{Top}(I, Y)$$

auffassen, denn $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt Hausdorffsch, somit lokal kompakt.

Bequemer wäre trotzdem ein Exp-Gesetz ohne Voraussetzungen.

$\boxed{\text{GESUCHT:}}$ Unterkategorie $Top' \subseteq Top$ mit:

(a) Top' enthält viele Räume

(b) Top' abgeschlossen unter allen üblichen Konstruktion

(c) Exponentialgesetz gilt in Top' ohne Voraussetzungen

Kandidaten

- Top' = (lokal kompakte Räume)

  a ✓ b ✗

  z. B.: ∞ Produkte lokal kompakter Räume sind nicht lokal kompakt

  [Blatt 1, Aufgabe 3 (g)/ Blatt 2, Aufgabe 2]

- ...
- ...
- ...

  } viele erfolglose Versuche

- Top' = (kompakt erzeugte Schwach-Hausdorff-Räume)

  a ✓ b ✓ c ✓ vgl. [May, § 5]

- Top' = (lokal kompakt erzeugte Schwach-Hausdorff-Räume)

  a ✓✓ b ✓ c ✓ vgl. [LS, § 4.5]

1 **Def.** Ein top. Raum X ist **lokal kompakt erzeugt (lke)**, falls er folgende UE besitzt:
Eine Abbildung $X \xrightarrow{t} T$ ist genau dann stetig, falls

$$K \xrightarrow{s} X \xrightarrow{t} T$$

stetig ist für alle lokal kompakten K und alle stetigen s.

(Äquivalent: [Blatt 2, Aufgabe 1 (a)]

$U \subseteq X$ offen $\iff$ $s^{-1}U$ offen in K für jedes lokal kompakte K, jedes stetige $s: K \to X$)

2. **Bsp.:** Jeder lokal kompakte Raum ist lke.

Sei $kTop \subseteq Top$ die Kategorie der lke Räume und stetigen Abb.

3. **Lemma:** Die Inklusion

$$kTop \xhookrightarrow{j} Top$$

besitzt einen Rechtsadjungierten

$$kTop \xleftarrow{k} Top$$

mit $k \circ j = id$.

(D.h. insbesondere:

$$kTop(X, kY) \cong Top(jX, Y)$$

für lke X und beliebiges Y.)

Beweis: Definiere für top. Raum Y

$k(Y) :=$ Menge Y mit Topologie

$\big(U \subseteq Y$ offen $:\iff s^{-1}U \subseteq K$ offen für alle lokal komp. K, alle stetigen $s: K \to Y \big)$

[...] $\square$

4. Def.: Das k-Produkt zweier lkc Räume X_1, X_2 ist gegeben durch
$$X_1 \times_k X_2 := k(X_1 \times X_2).$$

(Nach RAPL ist das wirklich ein Produkt in kTop.)

5. Bem.: Sind X_1, X_2 lokal kompakt, so ist auch $X_1 \times X_2$ lokal kompakt (Übung). Insbesondere ist dann
$$X_1 \times_k X_2 = X_1 \times X_2.$$

6. Def.: Ein lkc Raum X ist schwach hausdorffsch (sHd), falls die Diagonale $\underbrace{\Delta(X)}_{= \{(x,x) \mid x \in X\}} \subseteq X \times_k X$ abgeschlossen ist.

7. Bemerkung:

(a) Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch wenn $\Delta(X) \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Für lkc Räume X gilt:
hausdorffsch $\Longrightarrow$ schwach hausdorffsch

(c) Für lokal kompaktes X gilt:
hausdorffsch $\Longleftrightarrow$ schwach hausdorffsch

8. Def.: Top' := Kategorie der lkc sHd-Räume und stetigen Abb.

(a) Top' enthält viele Räume:

- alle lokal kompakten Hausdorff-Räume (s.o.), insbesondere alle topologischen Mannigfaltigkeiten
- alle metrisierbaren Räume [... ...], insbesondere alle Unterräume von $\mathbb{R}^n$. [Laures & Szymik, Beispiel am Anfang von §4.5]

(b) Top' abgeschlossen unter Konstruktionen

9 Theorem: In Top' existieren alle Limiten und Kolimiten von kleinen Diagrammen (siehe [Laures Szymik, §4.5])

⚠ Im Allgemeinen unterscheiden sich die Limiten und Kolimiten in Top' von denen in Top. Immerhin gilt:

10 Lemma: Jeder Top-Limes bzw. Top-Kolimes von Räumen aus Top', der selbst wieder in Top' liegt, ist bereits der entsprechende Top'-Limes bzw. Top'-Kolimes. $\square$

11 Satz:

(a) Jeder abgeschlosse oder offene Teilraum eines lke sHd-Raums ist wieder lke sHd.

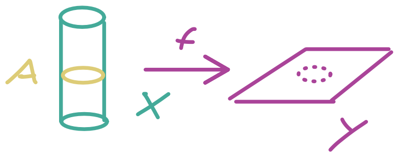
(b) Jedes Produkt eines lke Hd-Raums mit einem lokal kompakt Hd-Raum ist ein lke sHd-Raum.

(c) Jeder Quotient eines lke Hd-Raums modulo einer abgeschlossenen Relation $R \subseteq X \times_{Top} X$ ist wieder ein lke sHd-Raum.

(d) Jede Summe von lke sHd-Räumen ist ein lke sHd-Raum. $\square$

12 Korollar:

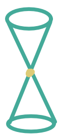
(a) Sind X, Y lke sHd-Räume, $A \subseteq X$ abgeschlossener Teilraum

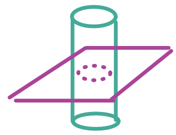


Dann sind auch

$X/A = X \amalg_A *$ und allgemeiner $X \amalg_A Y$

für jede stetige Abb. $f: A \to Y$





lke sHd-Räume

(b) Der gewöhnliche sequentielle Kolimes (Vereinigung)

$$\operatorname{colim}(X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow X_4 \quad \dots \quad)$$

ist für jede Sequenz abgeschlossener Unterräume von lke sHd-Räumen wieder ein lke sHd-Raum. $\square$

13 Beispiel:

Betrachte folgendes Pushout in Top:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\mathbb{N}} S^0 \arrow[r, hook, "\text{abg.}"] \arrow[d] & \coprod_{\mathbb{N}} D^1 \arrow[d] \\
* \arrow[r] & \bigvee_{\mathbb{N}} S^1 =: X
\end{tikzcd}$$

X ist <u>nicht</u> lokal kompakt, denn der Mittelpunkt hat keine kompakte Umgebung.
(Angenommen, K ist eine solche Umgebung.
Dann schneidet K jede Schleife in mindestens einem Punkt $\neq$ Mittelpunkt. Diese Punkte bilden eine ∞ diskrete Teilmenge von K ↯ K kompakt.)

Korollar 12(a) sagt:
X ist immerhin ein lkc sHd-Raum,
und somit nach Lemma 10 das Pushout
$\coprod D^1 / \coprod S^0$ <u>in Top'</u>.

(c) In Top' gilt starkes Exponentialgesetz

14 Theorem: Die Abbildungsmengen
$\mathrm{Top}'(X,Y) := \mathrm{Top}(X,Y)$ lassen sich derart mit einer Topologie versehen, dass wir lke sHd-Räume $\underline{\mathrm{Top}}'(X,Y)$ erhalten, für die gilt:

(a) $\underline{\mathrm{Top}}'(X,Y) = \underline{\mathrm{Top}}(X,Y)$ für alle lokal kompakten Hd-Räume

(b) Für stetige Abb. $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ sind auch

$$f_* : \mathrm{Top}(X, Y_1) \longrightarrow \mathrm{Top}(X, Y_2), \quad g \longmapsto f \circ g$$

und

$$f^* : \mathrm{Top}(Y_1, Z) \longleftarrow \mathrm{Top}(Y_2, Z), \quad g \circ f \longmapsfrom g$$

stetig.

$\boxed{\text{(c)}}$ Für alle lke sHd-Räume X, Y, Z ist

$$\underline{\mathrm{Top}}'(X, \underline{\mathrm{Top}}'(Y, Z)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}'(X \times Y, Z), \quad g \longmapsto g^\flat$$

ein Homöomorphismus.

Beweis: siehe [Laures & Szymik, §4.5]. $\square$

15 Notation: $Y^X := \underline{\mathrm{Top}}'(X, Y)$

In dieser Notation besagt das Exponentialgesetz also:

$$(Z^Y)^X \cong Z^{X \times Y}$$

16. Korollar:

Wir haben Funktoren $(-)^Y : \mathrm{Top}' \longrightarrow \mathrm{Top}'$

und $Y^{(-)} : (\mathrm{Top}')^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}'$.

Der Funktor $(-)^Y$ ist rechtsadjungiert zum Produktfunktor $Y \times -$.

Der Funktor $Y^{(-)} : (\mathrm{Top}')^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}'$ ist rechtsadjungiert zu sich selbst aufgefasst als Funktor $\mathrm{Top}' \longleftarrow (\mathrm{Top}')^{op}$.

Beweis:

Def. der Funktoren "offensichtlich" nach Theorem 14 b:

$$(-)^Y : \mathrm{Top}' \longrightarrow \mathrm{Top}' \qquad\qquad Y^{(-)} : (\mathrm{Top}')^{op} \longrightarrow \mathrm{Top}'$$

$$\begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ X' \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} X^Y \\ f_* \downarrow \\ (X')^Y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} X \\ f \uparrow \\ X' \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} Y^X \\ f^* \downarrow \\ Y^{X'} \end{array}$$

Erste Adjunktion folgt direkt aus Thm 14 (c):

$$\mathrm{Top}'(X \times Y, Z) \underset{14(c)}{\cong} \mathrm{Top}'(X, Z^Y)$$

Zweite Adjunktion folgt:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Top}')^{op}(Y^X, Z) \\ &\quad\| \\ &\mathrm{Top}'(Z, Y^X) \underset{14(c)}{\cong} \mathrm{Top}'(\underbrace{Z \times X}_{\cong}, Y) \\ &\qquad\qquad \cong \mathrm{Top}'(\overbrace{X \times Z}, Y) \underset{14(c)}{\cong} \mathrm{Top}'(X, Y^Z) \end{aligned}$$

$\square$

17. Korollar: In Top' ist das Produkt zweier Identifizierungen wieder eine Identifizierung.

Beweis: genau wie zu §2, Satz 5. $\square$

18. Definition: Die *Homotopiekategorie* HoTop hat als Objekte topologische Räume (also alle Objekte aus Top) und als Morphismen Homotopieklassen:

$$[X, Y] := \{\text{Homotopieklassen stetiger Abb. } X \longrightarrow Y\}$$
$$= \mathrm{Top}(X, Y)/_{\simeq}$$

wobei $f \simeq g :\Leftrightarrow \exists H: X \times I \longrightarrow Y$ mit $H(-,0) = f$ und $H(-,1) = g$.

Die gewöhnliche Komposition von Abbildungen induziert eine Komposition von Homotopieklassen (Ist $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$, so auch $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$ — siehe Einführung.)

Analog: Homotopiekategorie $\mathrm{Ho\,Top}'$

19. Korollar: Für jeden lke sHd-Raum Y induzieren die Funktoren $- \times Y$, $(-)^Y$ und $Y^{(-)}$ aus Korollar 16 Funktoren

$$- \times Y : \mathrm{Ho\,Top}' \longrightarrow \mathrm{Ho\,Top}'$$
$$(-)^Y : \mathrm{Ho\,Top}' \longrightarrow \mathrm{Ho\,Top}'$$
$$\boxed{Y^{(-)} : (\mathrm{Ho\,Top}')^{op} \longrightarrow \mathrm{Ho\,Top}'}$$

und wir haben Adjunktionen

$$\mathrm{Ho\,Top}' \underset{(-)^Y}{\overset{- \times Y}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho\,Top}'$$

$$\boxed{\text{und} \quad (\mathrm{Ho\,Top}')^{op} \overset{Y^{(-)}}{\rightleftarrows} \mathrm{Ho\,Top}'}$$

Beweis:

$- \times Y$ wohldef.: Sei $f \simeq g : X \longrightarrow X'$.

$\exists\ H: X \times I \longrightarrow X'$ Homotopie $f \rightsquigarrow g$.

$$\begin{array}{l} H \times Y: X \times I \times Y \longrightarrow X' \times Y \\ \qquad\qquad\quad \cong \\ \qquad\qquad X \times Y \times I \nearrow \end{array}$$

ist Homotopie $f \times Y \rightsquigarrow g \times Y$.

$(-)^Y$ wohldef.: Sei $f \simeq g : X \longrightarrow X'$

$\exists\ H: X \times I \longrightarrow X'$ Homotopie $f \rightsquigarrow g$

Also $H^{\#}: X \longrightarrow (X')^I$

Dann ist $(H^{\#})^Y: X^Y \longrightarrow ((X')^I)^Y$

$$\begin{array}{l} ((X')^I)^Y \\ \cong \text{ Theorem 14} \\ (X')^{Y \times I} \\ \cong \text{ Theorem 14} \\ ((X')^Y)^I \end{array}$$

adjungiert zu

$$((H^{\#})^Y)^{\flat}: X^Y \times I \longrightarrow (X')^Y,$$

und das ist eine Homotopie von f^Y nach g^Y [...].

$$\boxed{Y^{(-)} \text{ wohldef.: ganz ähnlich}}$$

Erste Adjunktion:

zu prüfen ist: $(\#)$ $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_0^{\#} \simeq f_1^{\#}$

$(\flat)$ $g_0 \simeq g_1 \Rightarrow g_0^{\flat} \simeq g_1^{\flat}$

zu $\#$: Ist $H: X \times Y \times I \longrightarrow Z$ Homotopie $f_0 \rightsquigarrow f_1$,

$$\begin{array}{l} \qquad \cong \\ X \times I \times Y \xrightarrow{\tilde{H}} Z \end{array}$$

so ist $\tilde{H}^{\#}: X \times I \longrightarrow Z^Y$ Homotopie $f_0^{\#} \rightsquigarrow f_1^{\#}$.

zu $\flat$: analog.

$$\boxed{\text{Zweite Adjunktion: folgt (vgl. Beweis zu Korollar 16)}}$$

$\square$

Ab jetzt:

Top := Top'

top. Raum := lke sHd-Raum

HoTop := HoTop'

Abbildung := stetige Abb.