2. Exponentialgesetz

1. Satz & Def.:

Ist
$$f: X \times Y \longrightarrow Z$$
stetig, so ist auch die adjungierte Abbildung
$$f^\#: X \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(Y, Z), \quad x \longmapsto (y \longmapsto f(x,y))$$
stetig.

Beweis:

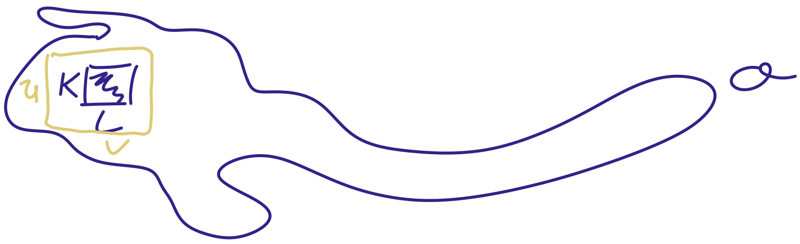
Sei $L \subseteq Y$ kompakt,
$O \subseteq Z$ offen.

z.z.: $(f^\#)^{-1} M(L, O)$ ist offen in X.

Sei $x \in (f^\#)^{-1} M(L, O)$, also
$$\underbrace{\{x\} \times L}_{\text{kompakt}} \subseteq \underbrace{f^{-1} O}_{\text{offen in } X \times Y}.$$

Nutze nun folgendes Rechtecklemma (Blatt 1):

Jede offene Umgebung eines kompakten Rechtecks enthält eine rechteckige offene Umgebung desselben.



Wir finden also offene $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ sodass
$$\{x\} \times L \subseteq U \times V \subseteq f^{-1} O.$$

Insbesondere ist also $U \times L \subseteq f^{-1} O$,

also ist $U \subseteq (f^\#)^{-1} M(L, O)$

eine offene Umgebung von x. $\square$

Für Abbildungen von Mengen haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{Set}(X, \mathrm{Set}(Y, Z)) \cong \mathrm{Set}(X \times Y, Z)$$
$$f^\# \leftarrow\!\shortmid \quad f$$
$$g \mapsto (g^b : (x,y) \mapsto g(x)(y))$$

Obiger Satz besagt, dass sich die Abb. $(f^\# \leftarrow\!\shortmid f)$ einschränken zu

$$\mathrm{Top}(X, \underline{\mathrm{Top}}(Y, Z)) \longleftarrow \mathrm{Top}(X \times Y, Z)$$
$$f^\# \leftarrow\!\shortmid \quad f$$

jede Umgebung jedes Punktes enthält eine kompakte Umgebung des Punktes

2. Satz (Exponentialgesetz)

X, Y, Z topologische Räume, Y **lokal kompakt**

Für eine beliebige Abb. $f : X \times Y \longrightarrow Z$ gilt:

$$f \text{ stetig} \iff f^\# \text{ stetig}$$

Wir haben also eine Bijektion

$$\mathrm{Top}(X, \underline{\mathrm{Top}}(Y, Z)) \xleftrightarrow{\cong} \mathrm{Top}(X \times Y, Z)$$
$$f^\# \leftarrow\!\shortmid \quad f$$
$$g \mapsto g^b$$

$$\text{„} (Z^Y)^X \cong Z^{X \times Y} \text{“}$$

3. Bemerkung*: Es gilt sogar: für lokal kompaktes Y ist $\underline{\mathrm{Top}}(Y, -)$ rechtsadjungiert zu $- \times Y$.

Beweis:

Sei $g : X \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(Y, Z)$ stetig.

zz: $g^b : X \times Y \longrightarrow Z$ ist stetig.

Sei dazu $\mathcal{O} \subseteq Z$ offen, $(x,y) \in (g^b)^{-1}\mathcal{O}$,

also $g(x)(y) \in \mathcal{O}$.

v.z.z.: $\exists$ Umgebung von (x,y) in $(g^b)^{-1}\mathcal{O}$.

Da $g(x)$ stetig, ist jedenfalls $\underset{\underset{y}{\ni}}{g(x)^{-1}\mathcal{O}} \subseteq Y$ offen.

Da Y lokal kompakt ist, können wir eine kompakte Umgebung L von y wählen, sodass

$$y \in L \subseteq g(x)^{-1}\mathcal{O},$$

also
$$g(x)(L) \subseteq \mathcal{O}$$

bzw.
$$x \in g^{-1} M(L, \mathcal{O}) =: \mathcal{U}.$$

Also ist $(x,y) \in \mathcal{U} \times L \subseteq (g^b)^{-1}(\mathcal{O})$. $\square$

4. Korollar:

(a) Sind X und Y lokal kompakt, so ist die Kompositionsabbildung

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times \underline{\mathrm{Top}}(Y,Z) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(X,Z)\\ (g\ ,\ f) &\longmapsto f\circ g\end{aligned}$$

stetig.

(b) Ist X lokal kompakt, so ist die Auswertungsabb.

$$\begin{aligned}ev: \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y\\ (f\ ,\ x) &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

stetig. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}ev_x: \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) &\longrightarrow Y\\ f &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

für jedes $x \in X$ stetig.

Beweis:

zu b: $id: \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(X,Y)$ ist stetig, $f \longmapsto f$

$$\begin{aligned}ev = id^b: \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y,\\ (f\ ,\ x) &\longmapsto (id)(f)(x) = f(x)\end{aligned}$$

also ist ev stetig. Auswertung an $x \in X$ ist die Komposition

$$\underbrace{\begin{aligned}\underline{\mathrm{Top}}(X,Y) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times X \xrightarrow{ev} Y\\ f &\longmapsto (f,\ x)\end{aligned}}_{\text{immer stetig}}$$

zu a: Die Komposition ist adjungiert unter $(g^b \leftarrow g)$ zu

$$\underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times \underline{\mathrm{Top}}(Y,Z) \times X \longrightarrow Z$$
$$(g, f, x) \longmapsto f(g(x)),$$

und diese lässt sich als folgende Komposition schreiben:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times \underline{\mathrm{Top}}(Y,Z) \times X & & (g, f, x) \\
\Big\| \wr \ \text{(stetig)} & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Top}}(Y,Z) \times \underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \times X & & (f, g, x) \\
\Big\downarrow \ \mathrm{id} \times ev \ \text{(stetig nach b)} & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Top}}(Y,Z) \times Y & & (f, g(x)) \\
\Big\downarrow \ ev \ \text{(stetig nach b)} & & \downarrow \\
Z & & f(g(x))
\end{array}$$

$\square$

Kleine Anwendung:

Sei $q: X \longrightarrow X'$ eine Identifizierung (d.h.: q surjektiv und X' trägt Quotiententopologie bzgl. q).

Ist auch

$q \times id: X \times Y \longrightarrow X' \times Y$ eine Identifizierung ?

5. Satz: Das Produkt einer Identifizierung mit einem lokal kompakten Raum ist wieder eine Identifizierung.

Beweis:

Wdh: $q: X \longrightarrow X'$ ist genau dann Identifizierung, wenn q folgende UE besitzt: für Abbildungen $X' \xrightarrow{t} T$ gilt: t stetig $\Longleftrightarrow$ $t \circ q$ stetig

Sei also $X' \times Y \xrightarrow{t} T$ gegeben. Dann ist

$$
\begin{array}{lll}
X' \times Y \xrightarrow{t} T & & \text{stetig} \\
\Updownarrow \text{ Exp.} & & \\
X' \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(Y, T) & & \text{stetig} \\
\Updownarrow & & \\
X \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}(Y, T) & & \text{stetig (UE von } q) \\
\Updownarrow \text{ Exp.} & & \\
X \times Y \xrightarrow[t \circ (q \times id)]{} T & & \text{stetig.}
\end{array}
$$

$\square$