1. Abbildungsräume

Lineare Algebra	Topologie
Vektorräume lineare Abb.	topologische Räume stetige Abb.
UVR	Unterraum
QVR	Quotiententop.
$V \oplus W$, $\pi_i: V_i$	Produkträume $X \times Y$
$V \oplus W$, $\oplus_i V_i$	Summen $X \amalg Y$
$\mathrm{Hom}_K(V, W)$	$\underline{\mathrm{Top}}(X, Y)$
lineare Abb bilden wieder einen VR	stetige Abb. bilden auch wieder einen top. Raum

X, Y top. Räume

$\mathrm{Top}(X, Y) := \{ f: X \longrightarrow Y \text{ stetig} \}$

Für $K \subseteq X$ kompakt und
$\quad \mathcal{O} \subseteq Y$ offen sei

$$M(K, \mathcal{O}) := \{ f \in \mathrm{Top}(X, Y) \mid f(K) \subseteq \mathcal{O} \}$$

1. Def.: Die **KO-Topologie** auf $\mathrm{Top}(X,Y)$ ist die kleinste Topologie, die die Mengen $M(K, \mathcal{O})$ für alle kompakten $K \subseteq X$ und offenen $\mathcal{O} \subseteq Y$ enthält.

Konkret ist $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Top}(X, Y)$ offen in der KO-Topologie, wenn jedes $f \in \mathcal{U}$ in einem endlichen Schnitt

$$M(K_1, \mathcal{O}_1) \cap \ldots \cap M(K_n, \mathcal{O}_n)$$

liegt, der ganz in $\mathcal{U}$ enthalten ist.

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{M}(K_i, \mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{U}$$

2. Def.: Der Abbildungsraum $\underline{\mathrm{Top}}(X,Y)$ ist die Menge $\mathrm{Top}(X,Y)$ mit der KO-Topologie.

3. Beispiel: $\underline{\mathrm{Top}}(\underbrace{\{1,\dots,n\}}_{\text{diskret}}, \underbrace{Y}_{\text{beliebig}}) \cong \underbrace{Y \times \dots \times Y}_{n}$

(Beweis: Wir haben jedenfalls zueinander inverse Bij.

$$f \xmapsto{\varphi} (f(1), \dots, f(n))$$

$$\underbrace{(i \mapsto y_i)}_{\substack{\text{stetig, da} \\ \{1,\dots,n\} \text{ diskret}}} \xleftarrow{\psi} (y_1, \dots, y_n)$$

φ ist stetig, denn für offenes $\mathcal{O} \subseteq Y$ ist

$$\varphi^{-1}(\underbrace{pr_i^{-1}(\mathcal{O})}_{Y \times Y \dots \times \mathcal{O} \times Y \times \dots \times Y}) = \mathcal{M}(\{i\}, \mathcal{O}) \text{ offen.}$$

– Erzeuger der Produkttopologie

ψ ist stetig, denn für offenes $\mathcal{O} \subseteq Y$ ist

$$\psi^{-1}(\mathcal{M}(K,\mathcal{O})) = \bigcap_{i \in K} pr_i^{-1}(\mathcal{O}) \quad \text{offen.} \quad \square$$

4. Bsp.: Sei X kompakter Hd-Raum,
(Y,d) metrischer Raum.
Dann ist die KO-Topologie auf $Top(X,Y)$ die von der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz

$$d(f,g) := \sup_{x\in X} d(fx,gx)$$

induzierte Topologie.

(Beweis:

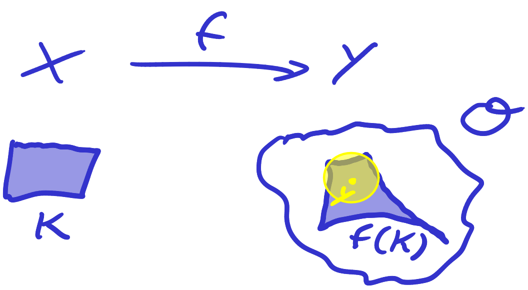
Supremum existiert:

Das Bild von $X \xrightarrow{(f,g)} Y\times Y \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ ist kompakt, da X kompakt, also beschränkt.

offen in KO-Topologie $\Rightarrow$ offen bzgl. d:

Sei $f\in M(K,\mathcal{O})$

zz: $M(K,\mathcal{O})$ enthält offene ε-Umgebung $U_\varepsilon(f)$ von f bzgl. d.



Da Y metrisch, existiert jedenfalls für jedes $y\in f(K)$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(y)\subseteq \mathcal{O}$.

Da K und somit $f(K)$ kompakt, überdecken endlich viele $U_{\varepsilon_1/3}(y_1),\dots,U_{\varepsilon_n/3}(y_n)$ die Menge $f(K)$.

Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ gilt tatsächlich

$\mathcal{U}_{\varepsilon/3}(f) \subseteq M(K, \mathcal{O})$:

Sei $g \in \mathcal{U}_{\varepsilon/3}(f)$, $x \in K$. z.z.: $gx \in \mathcal{O}$.

$$d(gx, y_i) \underset{\forall i}{\leq} d(gx, fx) + \underbrace{d(fx, y_i)}$$

$$\underset{\text{für ein } i}{\leq} \quad \varepsilon/3 \qquad\qquad \varepsilon_i/3.$$

$$< \quad \varepsilon,$$

d.h. $g(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_i) \subseteq \mathcal{O}$. Also $gx \in \mathcal{O}$. ✓.

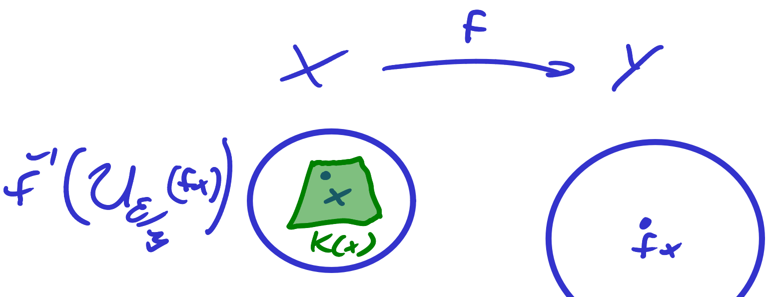
offen in KO-Topologie $\Leftarrow$ offen bzgl. d

Sei $\mathcal{U}_\varepsilon(f)$ gegeben.

zz.: $\exists\, K_1, \dots, K_n$ kompakt in X und

$\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ offen in Y sodass

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i, \mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(f)$$



Da X lokal kompakt ist,
existiert zu jedem $x \in X$ eine
kompakte Umgebung $K(x)$ mit $K(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}_{\varepsilon/3}(fx))$

Da X kompakt ist, überdecken endlich viele
$K(x_1), \dots, K(x_n)$ ganz X.

Wähle $K_i := K(x_i)$,

$\mathcal{O}_i := \mathcal{U}_{\varepsilon/3}(f(x_i))$.

Sei $g \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{M}(K_i, O_i)$.
Dann ist für jedes $x \in X$

$$d(gx, fx) \underset{\forall i}{\leq} d(gx, fx_i) + d(fx_i, fx)$$

$$\underset{\substack{\text{für ein } i \\ (\text{sodass } x \in K(x_i))}}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$$\leq 2\varepsilon/3, \quad \text{also}$$

$$d(g, F) < \varepsilon.$$ $\square$

5. Satz: Für stetige Abb. $Y \xrightarrow{g} Y'$
und $X' \xrightarrow{f} X$
sind auch die Abb.

$$\underline{\mathrm{Top}}(X,Y) \xrightarrow{g_*} \underline{\mathrm{Top}}(X, Y')$$
$$h \longmapsto g \circ h$$

$$\underline{\mathrm{Top}}(X', Y) \xleftarrow{f^*} \underline{\mathrm{Top}}(X, Y)$$
$$h \circ f \longleftarrow\!\shortmid \; h$$

stetig.

Beweis:

$$(g_*)^{-1} \mathcal{M}(K, O) = \mathcal{M}(K, \underbrace{g^{-1} O}_{\text{offen}})$$

$$(f^*)^{-1} \mathcal{M}(K, O) = \mathcal{M}(\underbrace{f(K)}_{\text{kompakt}}, O)$$

$\square$