Topologie I

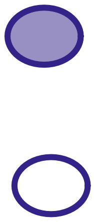
Topologie

(lineare) Algebra

Bsp (Wdh):

$\exists$ stetige Abb. $r: D^1 \longrightarrow S^1$ mit $r \circ \text{inkl.} = \text{id}$?

$\exists$ Homomorphismus $r: 0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit



$$\begin{tikzcd} D^1 \arrow[r, "r"] & S^1 \\ S^1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "r"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

lösen

NEIN! $\longleftarrow$ NEIN

Bsp. (neu):

$\exists$ stetige Abb. $r: D^{n+1} \longrightarrow S^n$ mit $r \circ \text{inkl.} = \text{id}$?

$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, "r"] & S^n \\ S^n \arrow[u, hook] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_n}{\underset{(\text{oder } H_n)}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "r"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

NEIN $\longleftarrow$ NEIN

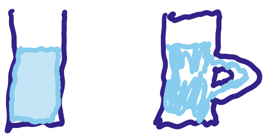
Korollar: Brouwerscher Fixpunktsatz

Jede stetige Selbstabbildung

$$D^n \longrightarrow D^n$$

hat mindestens einen Fixpunkt.

Bsp.:

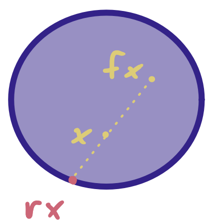


Beweis des Fixpunktsatzes:

Genau wie für $n=2$. Falls $f: D^n \longrightarrow D^n$ stetig ohne Fixpunkt existiert, definiere

$$r: D^n \longrightarrow S^n$$

wie folgt:



(r ist stetig: ...) $\square$

Einzige Herausforderung: Def. von π_n / H_n.

Wir brauchen:

- verlässlichen Formalismus: Kategorien & Funktoren
- minimales Verständnis der Kategorie Top
- gute Funktoren wie π_1, z.B.

π_n (höhere Homotopiegruppen)

⊕ einfache Def.

⊕ erhalten viel der Struktur von Top

⊖ Berechnung unmöglich, z.B. $\pi_n(S^m)$ i.A. nicht bekannt

H_n (Homologiegruppen)

⊖ $\exists$ viele Def., allesamt wenig naheliegend

⊙ erhalten oft „genug" Struktur von Top

⊕ berechenbar

H^n (Kohomologiegruppen) (Top II)