Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Marcus Zibrowius
Jan Hennig

Wintersemester 2024
05.11.2024

Topologie I
Blatt 4

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

1 | Stehgreiffragen: Faserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

(a) Wahr oder falsch: Die Abbildung $p\colon X \to *$ ist eine Faserung.
(b) Wahr oder falsch: Die Abbildung $pr_1\colon (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \to I$ ist eine Faserung.
(c) Wahr oder falsch: Ist $p\colon E \to B$ eine Faserung und $X \subseteq E$, dann ist $p|_X\colon X \to B$ eine Faserung.

2 | Bilder von Faserungen

Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung mit $E \neq \emptyset$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(p)$ eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von B ist. Konkret: Ist $x \in \mathrm{im}(p)$ und $\gamma\colon I \to B$ ein Weg von x nach $y \in B$, dann gilt $y \in \mathrm{im}(p)$.
(b) Folgern Sie, dass eine Faserung in einen wegzusammenhängenden Raum surjektiv ist.
(c) Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-surjektive Faserung.

3 | Satz von Kieboom ★

Ziel dieser Aussge ist eine Verallgemeinerung von Blatt 3 Aufgabe 3(a) zu zeigen (Produkte von Kofaserungen sind Kofaserungen).

Zur Vorbereitung:

(a) Sei $i_a\colon A \hookrightarrow B$ eine Kofaserung und $p\colon E \to B$ eine Faserung. Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_A(A)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
(Hinweis: Die Abbildung $u\colon B \to A$ in der Definition eines UDRs kann „besser" gewählt werden.)
(b) Seien $j\colon B \to A$ und $i\colon A \to X$ Abbildungen, wobei i und $i \circ j$ Kofaserungen sind. Zeigen Sie, dass j eine Kofaserung ist.
(c) Betrachte das folgende kommutative Diagram, wobei $i\colon A \to X$ ein (starker) Deformationsretrakt und $p\colon E \to B$ eine Faserung ist. Zusätzlich gebe es ein $u\colon X \to I$ mit $u^{-1}(\{0\}) = A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass einen Lift $H\colon X \to E$ existiert.
(d) Betrachte das folgende kommutative Diagramm, wobei $i\colon A \to X$ eine Kofaserung und p_A, p_X Faserungen sind:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, two heads, "p_A"'] & & X \arrow[dl, two heads, "p_X"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Folgern Sie, dass $i\colon A \to X$ eine Kofaserung über B ist, d.h. eine Retraktion $r\colon X \times I \to M_i$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\mathrm{id}_{M_i}"] \arrow[d] & M_i \arrow[d] \\
X \times I \arrow[ur, dashed, "r"] \arrow[r, "p_X \circ pr_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

Betrachte nun das folgende kommutative Diagram:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook, "i_{X_0}"'] & B_0 \arrow[d, hook, "i_{B_0}"'] & E_0 \arrow[l, two heads, "p_0"'] \arrow[d, hook, "i_{E_0}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & B & E \arrow[l, two heads, "p"]
\end{tikzcd}$$

wobei i_{X_0}, i_{B_0}, i_{E_0} Kofaserungen sind, und p_0, p Faserungen sind.

(e) Zeigen Sie, dass $p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow E$ eine Kofaserung ist.
(f) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
(g) Zeigen Sie, dass $p_0|_{p^{-1}(i_{B_0}(B_0))}\colon p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \to B_0$ eine Faserung ist.
(h) Zeigen Sie, dass $E_0 \hookrightarrow p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung über B_0 ist.
(i) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0))$ eine Kofaserung ist.
(j) Zeigen Sie, dass $\overline{p}\colon X \times_B E \to X$ eine Faserung ist.
(k) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_B p^{-1}(i_{B_0}(B_0)) \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.

Endlich folgt das Finale:

(l) Zeigen Sie, dass $X_0 \times_{B_0} E_0 \hookrightarrow X \times_B E$ eine Kofaserung ist.
(m) Folgern Sie, dass das Produkt zweier Kofaserungen eine Kofaserung ist (Blatt 3, Aufgabe 3(a)).