

## Topologie I Blatt 3

---

So fern nicht weiter spezifiziert arbeiten wir in der Kategorie der lokal kompakt erzeugten, schwach Hausdorff Räumen und bezeichnen diese Kategorie mit **Top**.

### 1 | Stehgreiffragen: ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakte und Kofaserungen

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Ist  $S^1 = \partial D^2 \hookrightarrow D^2$  ein ((Umgebungs-)Deformations-)Retrakt?
- (b) Wahr oder falsch: Jede abgeschlossene Einbettung  $A \hookrightarrow X$  ist eine Kofaserung.

### 2 | Mit dem Abbildungszylinder von $X$ nach $Y$

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $M_f$  der zugehörige Abbildungszylinder.

- (a) Zeigen Sie, dass die Inklusion  $Y \hookrightarrow M_f$  ein Deformationsretrakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Inklusion  $X \hookrightarrow M_f$  ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

### 3 | Produkte und Summen von Kofaserungen

Seien  $f: A \hookrightarrow X$  und  $g: B \hookrightarrow Y$  Kofaserungen.

- (a) Zeigen Sie, dass das Produkt  $f \times g: A \times B \rightarrow X \times Y$  eine Kofaserung ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Summe  $f \amalg g: A \amalg B \rightarrow X \amalg Y$  eine Kofaserung ist.

### 4 | Diesen Teil können wir ignorieren

Sei  $A$  zusammenziehbar und  $i: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.

- (a) Zeigen Sie, dass die Projektion  $X \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz ist.
- (b) Finden Sie Gegenbeispiele, die jeweils nur eine der beiden Annahmen erfüllen.

### 5 | Abbildungskegel

Der Kegel  $CX$  über einem Raum  $X$  ist der Quotientenraum  $CX := (X \times I)/i_1(X)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $CX$  für alle  $X$  zusammenziehbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $i_0: X \hookrightarrow CX$  ein Umgebungsdeformationsretrakt ist.

Der Abbildungskegel  $Cf$  einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist definiert als folgender Pushout:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & CX \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Cf \end{array}$$

Sei  $f: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.

- (c) Zeigen Sie, dass  $Cf$  homotopieäquivalent zum Quotienten  $X/A$  ist.
-