

## Topologie I Blatt 1

---

### 1 | Stehgreiffragen: Topologie

Alle Fragen sollten lediglich eine kurze Antwort benötigen:

- (a) Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  zwei Topologien auf  $X$  mit  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Für welche  $i, j \in \{1, 2\}$  gelten die folgenden Aussagen:
  - (i) Ist  $X$  kompakt bzgl.  $\mathcal{T}_i$ , so auch bzgl.  $\mathcal{T}_j$ .
  - (ii) Ist  $X$  Hausdorff bzgl.  $\mathcal{T}_i$ , so auch bzgl.  $\mathcal{T}_j$ .
  - (iii) Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung bzgl.  $\mathcal{T}_i$ , so auch bzgl.  $\mathcal{T}_j$ .
  - (iv) Ist  $f: Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung bzgl.  $\mathcal{T}_i$ , so auch bzgl.  $\mathcal{T}_j$ .
- (b) Wahr oder falsch: Ist  $f: X \rightarrow Y$  injektiv/surjektiv, so auch  $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ .
- (c) Wahr oder falsch: Ist  $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  injektiv/surjektiv, so auch  $f: X \rightarrow Y$ .
- (d) Wahr oder falsch: Ist  $\pi_1(X, x_0) = 0$  für  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  kontrahierbar.
- (e) Wie sehen wie sehen Produkte/Koprodukte in **Top** aus?

### 2 | Rechtecklemma

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume, seien  $K \subseteq X$  und  $L \subseteq Y$  kompakte Teilräume, und sei  $O \subseteq X \times Y$  eine offene Teilmenge des Produkts, mit  $K \times L \subseteq O$ .

Zeigen Sie, dass offene Teilmengen  $U \subseteq X$  und  $V \subseteq Y$  existieren, mit:

$$K \times L \subseteq U \times V \subseteq O.$$

Slogan: „Jede offene Umgebung eines kompakten Rechtecks enthält ein offenes Rechteck.“

### 3 | Lokal kompakt

Ein topologischer Raum  $X$  heißt lokal kompakt, wenn für jeden Punkt  $x \in X$  und jede offene Umgebung  $U \subseteq X$  eine kompakte Umgebung  $K$  existiert mit  $x \in K \subseteq U$ .

- (a) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume von lokal kompakten Räumen lokal kompakt sind.
- (b) Zeigen Sie, dass offene Unterräume von lokal kompakten Räumen lokal kompakt sind.
- (c) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^n$  lokal kompakt ist.
- (d) Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \{(0, 0)\}$  nicht lokal kompakt ist.
- (e) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}$  nicht lokal kompakt ist.
- (f) Finden Sie einen kompakten Raum mit einem offenen nicht-lokal kompaktem Unterraum.  
(Hinweis: modifizieren Sie (e). Dieser Raum ist kompakt aber nicht lokal kompakt.)
- (g) Finden Sie lokal kompakte Räume  $A_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  nicht lokal kompakt ist.

### 4 | The (trivial) legend of Zelda

Welche Fundamentalgruppe hat das Komplement von  $n$  disjunkten unverschlungenen und unverknoteten Kreisen in  $\mathbb{R}^3$ ?

Konkreter: Sei  $S^1$  der Einheitskreis in  $\mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Komplements von  $(S^1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (S^1 \times \{n\})$  in  $\mathbb{R}^3$ .

## 5 | Es gibt kein Exponentialgesetz in $\mathbf{Top}$

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es kein allgemeines Exponentialgesetz in  $\mathbf{Top}$  geben kann.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\text{coeq}(i \times \mathbb{Q}, j \times \mathbb{Q}) \rightarrow \text{coeq}(i, j) \times \mathbb{Q}$  kein Homöomorphismus ist.  
(Hinweis: Nehmen Sie die Inklusion  $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  und  $j: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto n + 1$ )
- (b) Zeigen Sie, dass es kein Exponentialgesetz in  $\mathbf{Top}$  gibt.

In anderen Worten:  $\mathbf{Top}$  ist nicht kartesisch abgeschlossen.

## 6 | KO war die einzige Möglichkeit ★

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es maximal eine Topologie auf  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  gibt, sodass ein Exponentialgesetz gilt.

- (i) Eine Topologie auf  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  heißt „grob genug“, wenn für  $f: Z \times X \rightarrow Y$  stetig auch  $f^\sharp: Z \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  stetig ist.
- (ii) Eine Topologie auf  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  heißt „fein genug“, wenn für  $f^\sharp: Z \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  auch  $f: Z \times X \rightarrow Y$  stetig ist.

Eine Topologie, die ein Exponentialgesetz erfüllt muss „grob genug“ und „fein genug“ sein.

- (a) Zeigen Sie, dass eine Topologie auf  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  genau dann „fein genug“ ist, wenn die Auswertungsabbildung  $ev: X \times \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \rightarrow Y$  stetig ist.
- (b) Sei  $\mathcal{T}_{\text{grob}}$  eine Topologie, die „grob genug“ ist und  $\mathcal{T}_{\text{fein}}$  eine Topologie, die „fein genug“ ist. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{T}_{\text{grob}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{fein}}$ .
- (c) Zeigen Sie, dass es höchstens eine Topologie gibt, die „grob genug“ und „fein genug“ ist.  
(Bemerkung: Es gibt eine konkrete Beschreibung aller Räume die eine solche Topologie erlauben)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine solche Topologie für lokal-kompakte Räume durch die kompakt-offen Topologie gegeben ist. Nach Teil c) gibt es auch nur diese.

---