

Beweismuster

A: Kontraposition

B: Beweis durch Widerspruch

C: Ringschluss

D: vollständige Induktion

A: Kontraposition

Satz: $A \Rightarrow B$

Beweis: Angenommen, $\neg B$.

Dann sieht man $\neg A$.

□

(Das ist ein Beweis, denn

$A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Beispiel aus Vorlesung:

131 Satz: Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von M , d.h.:

(a) verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt:

$$\underbrace{([m] \neq [n])}_A \Rightarrow \underbrace{([m] \cap [n] = \emptyset)}_B$$

(b) ...

Beweis zu a:

Angenommen, $\neg B$: $\neg ([m] \cap [n] = \emptyset)$

bzw.: $[m] \cap [n] \neq \emptyset$

bzw.: $\exists x \in [m] \cap [n]$

Dann sehen wir ...

...

... $\neg A$: $\neg ([m] \neq [n])$

bzw.: $\neg (\neg ([m] = [n]))$

bzw.: $[m] = [n]$

□

Beispiel:

Satz: Sei $n \in \mathbb{Z}$.

Ist $\underbrace{n^2 \text{ gerade}}_A$, so ist auch $\underbrace{n \text{ gerade}}_B$.

Beweis:

Angenommen, $\neg B$: n ungerade.

Dann ex. $k \in \mathbb{Z}$, für die gilt:

$$n = 2k + 1,$$

also ist

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

Also ist n^2 ungerade ($\neg A$).

□

B: Beweis durch Widerspruch

Satz: A

Beweis: Angenommen, $\neg A$.

Dann folgt einerseits $(*)$.

Andererseits folgt $(**)$.

$(*) \downarrow (**)$

"stehen
im Widerspruch"

□

(Das ist ein Beweis, da von den beiden Aussagen A , $\neg A$ genau eine gelten muss.)

Beispiel aus Vorlesung:

1.6 Warnung: Es gibt keine Menge, die als Elemente alle Mengen hat.

A

Beweis: durch Widerspruch

Annahme: $\neg A$ Es gibt so eine Menge Z , die alle Mengen als Elemente hat.

Betrachte Teilmenge $T := \dots$

$\dots$
 $\dots$
 $\dots$

Falls $(*) T \in T$, folgt $(**) T \notin T$. $(*) \downarrow (**)$

Falls $(*) T \notin T$, folgt $(**) T \in T$. $(*) \downarrow (**)$

□

Beispiel:

Satz: Sei $n \in \mathbb{Z}$.

A Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, $\neg A$: $\overset{n^2 \text{ gerade}}{\downarrow} \quad \overset{n \text{ — gerade}}{\downarrow}$

$$A: \forall n \in \mathbb{Z}: X(n) \Rightarrow Y(n)$$

$$\neg A: \neg (\forall n \in \mathbb{Z}: X(n) \Rightarrow Y(n))$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}: \neg (X(n) \Rightarrow Y(n))$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}: \neg (\neg X(n) \vee Y(n))$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}: \neg \neg X(n) \wedge \neg Y(n)$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}: X(n) \wedge \neg Y(n)$$

Also, angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass n^2 gerade und n ungerade ist.

Sei n so eine Zahl. Dann ist einerseits

(*) n^2 gerade. Andererseits gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k+1$. Also ist

(**) $n^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.o.}}}{2} \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$

Offenbar (*) $\nleftrightarrow$ (**)

□

C: Ringschluss

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) ...

(b) ...

(c) ...

(d) ...

(e) ...

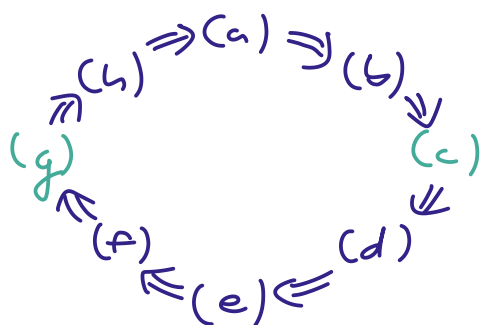
(f) ...

(g) ...

(h) ...

(Das bedeutet: $a \Leftrightarrow b$ und $a \Leftrightarrow c$ und $a \Leftrightarrow d \dots$
und $b \Leftrightarrow c$ und $b \Leftrightarrow d$ und $b \Leftrightarrow e \dots$
und $c \Leftrightarrow d$ und ...
...)

Beweis durch Ringschluss:



□

1.23 Satz: Für Abb. $f: A \rightarrow B$ sind äquivalent:

(a) f ist ein Isomorphismus von Mengen

(b) f ist bijektiv

(c) f ist injektiv und surjektiv.

Beweis:



□

D: vollständige Induktion

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Beweis:

$A(1)$ ist wahr.

– Induktionsanfang.

Wir nehmen nun an,

(IV): $A(n)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung

Dann folgt, ... $A(n+1)$

– Induktionsschluss

□

(Dass das ein Beweis ist, ist ein Axiom von $\mathbb{N}$.)

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$A(n)$ n Studierende können sich auf $n!$ ($= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$) Arten auf n verschiedene Stühle verteilen.

(z.B.  oder  oder ...)

Beweis:

Induktionsanfang: Ein Studierender kann sich auf genau $1! = 1$ Arten auf 1 Stuhl verteilen.

Induktionsschluss: Wir nehmen an, wir wären bereits, dass für ein bestimmtes n gilt:

(IV) n Studierende können sich auf $n!$ Arten auf n verschiedene Stühle verteilen.

Dann können sich $n+1$ Studierende auf

$\underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Anzahl der Stühle,} \\ \text{aus denen der 1.} \\ \text{Studi wählen kann} \end{array} \right)}_{n+1} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{l} \text{Anzahl der Arten, wie sich die} \\ \text{verbleibenden } n \text{ Studis auf die} \\ \text{verbleibenden } n \text{ Stühle verteilen} \\ \text{können} \end{array} \right)}_{n! \text{ nach IV}}$

Arten auf $n+1$ Stühle verteilen, also auf $(n+1)!$ Arten. □

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$A(n)$

Wenn von n Personen je zwei genau einmal miteinander anstoßen, klingelt es $\frac{n(n-1)}{2}$ mal.

Beweis:

Induktionsanfang: Ist nur $n=1$ Person da, wird

$$\frac{1 \cdot 0}{2} = 0\text{-mal angetoßen.} \quad \checkmark$$

Induktionsschluss: Wir nehmen an, wir wissen bereits, dass für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(IV) Wenn von n Personen je zwei genau einmal miteinander anstoßen, klingelt es $\frac{n(n-1)}{2}$ mal.

Zu zeigen ist:

Wenn von $n+1$ Personen je zwei genau einmal miteinander anstoßen, klingelt es $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$ mal.

Für $n+1$ Personen klingelt es

$$\begin{aligned} n + \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} \\ \uparrow & \quad \uparrow \\ (n+1). \text{ Person} & \quad \text{Die übrigen } n \text{ Personen} \\ \text{stößt mit} & \quad \text{stoßen nach IV so oft} \\ n \text{ Personen an} & \quad \text{miteinander an.} \end{aligned}$$

$$= \frac{n + n^2}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

□

Beispiel:

Satz (Gaußsche Summe):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$(1 + 2 + \dots + n) \quad \nearrow$$

Beweis:

Anfang: $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad \checkmark$

Schluss:

(IV) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein n .

z.z: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Das rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \dots \dots = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

□