

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

X	$\neg X$
w	f
f	w

Aussagen

Behauptung: $\neg(X \vee Y)$ äquivalent zu $\neg X \wedge \neg Y$

Beweis durch Wahrheitstabelle:

X	Y	$X \vee Y$	$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

□

Behauptung: $(X \vee Y) \wedge Z$ äquivalent zu $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$

Beweis durch Wahrheitstabelle:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$(X \vee Y) \wedge Z$	$X \wedge Z$	$Y \wedge Z$	$(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f	f
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

□

Übung: $X \Rightarrow Y$ äquivalent zu $(\neg X) \vee Y$

Satz 1.9: M Menge, $A, B, C \subseteq M$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Beweis:

Für $x \in M$ ist zu zeigen:

$$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Das zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} \underbrace{(x \in A \cup B)}_{\text{Aussage}} \wedge \underbrace{(x \in C)}_{\text{Aussage}} \\ &\stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} (\underbrace{x \in A}_{X} \vee \underbrace{x \in B}_{Y}) \wedge \underbrace{(x \in C)}_{Z} \\ &\quad (X \vee Y) \wedge Z \\ &\quad (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Satz 1.8 (b): } M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \in M \setminus (A \cup B) &\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} \underbrace{x \in M}_{\text{Aussage}} \wedge \neg \underbrace{(x \in A \cup B)}_{\text{Aussage}} \\ &\Leftrightarrow x \in M \wedge \neg (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in M \wedge \neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\ &\quad \underline{\Leftrightarrow (x \in M \wedge x \notin A) \wedge (x \in M \wedge x \notin B)} \\ &\stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} x \in (M \setminus A) \wedge x \in (M \setminus B) \\ &\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B) \quad \square \end{aligned}$$

$X \wedge Y \wedge Z$
äquivalent zu
 $X \wedge Y \wedge X \wedge Z$

Notation: $X(i)$ Aussage, die von $i \in I$ abhängt

z.B. $I = \mathbb{N}$

$X(i) := "i \text{ ist eine Primzahl}"$

hier: $\forall i \in \mathbb{N}: X(i)$ — falsch

$\exists i \in \mathbb{N}: X(i)$ — richtig, z.B. $i = 2$

„für alle“

$\forall i \in I: X(i)$

$\forall i \in I, X(i)$

$\forall i \in I [X(i)]$

„gilt“

„es gibt (mindestens) ein“

„sodass gilt“
„mit der Eigenschaft“

$\exists i \in I: X(i)$

$\exists i \in I, X(i)$

$\exists i \in I [X(i)]$

Merke:

$\neg (\forall i \in I: X(i))$ ist äquivalent zu $\exists i \in I: \neg X(i)$

$\neg (\exists i \in I: X(i))$ ist äquivalent zu $\forall i \in I: \neg X(i)$

Itis-Aufgaben: siehe „Links zum Selbststudium“ unter

https://www.math.uni-duesseldorf.de/~zibrowius/2025ws_vorkurs.html