1 | Jetzt wechseln!

Sei $V := \{(x \quad y \quad z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $W := \mathbb{R}^2$. Die folgenden Tupel B und B' bzw. C und C' sind jeweils geordnete Basen von V bzw. W:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Sei $f\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_C M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung hat f bezüglich der Basen B' und C'?

SCHRITT 1:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] \arrow[rrr, "\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}"] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\cong"] \\
\mathbb{R}^3 \cong & V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrr, dotted] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

L_B

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix} = B'$$

$$C = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad C' = \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix} \qquad L_{C'}$$

$${}_{C'}M_{B'}(f) = ?$$

SCHRITT 2:

Linksinverses L_B zu B:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ ]^{+} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ ]^{+} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}} \\ \begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{matrix}}_{\text{ZNF}} & \begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}1&0&0\\1&1&0\end{matrix}}\\ \begin{matrix}1&1&1\end{matrix}\end{matrix}\end{array}\right)$$

$L_B := \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ ist also

ein Linksinverses zu B.

[OPTIONAL: Probe

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \checkmark$$

]

Linksinverses $L_{C'}$ zu C':

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \rfloor_{+2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 1 & +2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

$L_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & +2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also ein (Links-)Inverses zu C.

[OPTIONAL: Probe ...]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rrr, "{\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=B}"'] \arrow[dr, "\varphi_B", "\cong"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\cong", "{C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}"'] \\
\mathbb{R}^3 \supseteq \arrow[u, bend left, "L_B"] & V \arrow[r, "f"] & W \arrow[dr, bend left, "L_{C'}"] & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}=B'}"] \arrow[ur, "\varphi_{B'}"', "\cong"] \arrow[rrr, dotted, "{_{C'}M_{B'}(f) = ?}"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\cong"', "{C'=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}}"]
\end{tikzcd}$$

SCHRITT 3:

$${}_{C'}M_{B'}(f) =$$