

Perspektivwechsel.

Sei $f \in V$ ein Endomorphismus eines endlich-dim. K -VRs V . Nach Satz 3.19 können wir χ_f schreiben als

$$(*) \quad \chi_f = (x - a_1)^{u_1} \cdot \dots \cdot (x - a_\ell)^{u_\ell} \cdot Q \in K[x],$$

wobei $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen Nullstellen von χ_f sind und $Q \in K[x]$ ein Polynom ohne Nullstellen in K ist.

9.21 Def.: Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen Nullstellen von χ_f , also die EW von f .

algebraische Vielfachheit von $a_i :=$ Exponent u_i in $(*)$

geometrische Vielfachheit von $a_i := \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$

9.22 Satz: Für jeden EW a von f ist

$$\begin{array}{ccc} \text{geometrische} & & \text{algebraische} \\ \text{Vielfachheit} & \leq & \text{Vielfachheit} \\ \text{von } a & & \text{von } a \end{array}$$

Beweis:

Wähle Basis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ von $\text{Eig}(f; a)$

(also $m = \text{geometrische Vielfachheit von } a$).

Ergänze diese zu einer Basis

$$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \dots, \underline{b}_n) \quad \text{von } V.$$

Dann ist ${}_B M_B(f)$ von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^m \\ \left| \begin{array}{cc|c} a & 0 & * \\ 0 & a & \\ \hline & 0 & M' \end{array} \right| \end{array}$$

$\uparrow$
 $f(\underline{b}_1) = \begin{cases} a \cdot \underline{b}_1 \\ + 0 \cdot \underline{b}_2 \\ + \dots \\ + 0 \cdot \underline{b}_n \end{cases}$

Somit

$$\chi_f = \det \left| \begin{array}{cc|c} a-x & 0 & * \\ 0 & a-x & \\ \hline & 0 & M'_{n-m}(x, x) \end{array} \right|$$

$$= (a-x)^m \cdot \chi_{M'}$$

$\uparrow$ könnte weitere Faktoren $(a-x)$ enthalten

□

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^2 \ni f$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x) \cdot (3-x)$$

$$\text{Eig}(f; 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Eig}(f; 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

EW	alg. V	geom. V.
2	1	1
3	1	1

(b) $\mathbb{R}^2 \ni g$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_g = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2$$

$$\text{Eig}(g; 2) = \mathcal{L} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

EW	alg. V	geom. V.
2	2	1

(c) $\mathbb{R}^2 \ni h$

$$M(h) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_h = \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

hat keine reelle Nullstelle.

Also hat h keine EW.

(d) $\mathbb{C}^2 \ni j$

$$M(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_j &= \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x] \\ &= (x-i)(x+i) \end{aligned}$$

EW	alg. V	geom. V.
i	1	1
-i	1	1

9.23 Algebraisches Diagonalisierbarkeitskriterium

$f \in G \vee$ Endomorphismen eines endlich-dim. K -VRs $\vee$

f ist diagonalisierbar

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_f \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \\ \text{(d.h. } \chi_f = (x-a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x-a_\ell)^{n_\ell} \cdot q \\ \text{mit } q \in K^+ \\ \text{und} \\ \text{für jeden EW } a \text{ von } f \text{ gilt:} \\ \text{geometrische Vielfachheit} = \text{algebraische Vielfachheit} \\ \text{von } a \text{ von } a \end{array} \right.$

Bewerks :

($\Downarrow$) Nach Annahme existiert Basis von V , die nur aus EV von f besteht. In geeigneter Umordnung dieser Basis hat f die Gestalt

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & s_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & s_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_\ell & \\ & & & & & & s_\ell & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Also $x_f = (a_1 - x)^{u_1} \cdot \dots \cdot (a_\ell - x)^{u_\ell}$

mit $u_i = \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$

($\Uparrow$) Nach Annahme ist

$$\chi_f = (a_1 - x)^{u_1} \cdots (a_\ell - x)^{u_\ell} \cdot q$$

mit $q \in K^x$ mit $u_i = \dim \operatorname{Eig}(f; a_i)$

Da $\deg \chi_f = \dim V$, folgt

$$\sum_{i=1}^{\ell} u_i = \dim V.$$

$$\parallel$$
$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim \operatorname{Eig}(f; a_i).$$

Also ist f diagonalisierbar nach vorherigem Kriterium 9.10. □