

9.11 Def.: Die Determinante eines Endomorphismus φ eines endlich-dim. VRs V ist

$$\det(\varphi) := \det({}_B M_B(\varphi))$$

für eine Basis B von V .

Diese Def. hängt nicht ab von der Wahl von B : Ist B' eine weitere Basis von V , so sind ${}_B M_B(\varphi)$ und ${}_{B'} M_{B'}(\varphi)$ ähnlich, und es gilt:

9.12 Lemma: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

Beweis: Ist A' ähnlich zu A so ist $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$ für eine invertierbare Matrix T , und es folgt:

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(T^{-1} \cdot A \cdot T) \\ &\stackrel{8.7}{=} \det(T)^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(T) \\ &= \det(T)^{-1} \cdot \det(T) \cdot \det(A) \end{aligned}$$

Multiplikation
in K kommutativ $\rightarrow = \det(A)$

□

9.13 Def.: Das charakteristische Polynom χ_A einer Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist

$$\chi_A := \det(A - x \cdot \mathbb{1}_n) \in K[x]$$

$$= \det \left(A - \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} \right)$$

Leibnizformel $\nearrow$

nur ein kommutativer Ring
(macht nichts)

$$\in \text{Mat}_{K[x]}(n \times n)$$

Das charakteristische Polynom χ_f eines Endomorphismus $f \in \text{End } V$ eines endlich-dim VRs V ist das char. Polynom von ${}_B M_B(f)$ für eine Basis B von V .

χ_f ist wiederum unabhängig von der Wahl von B , denn wiederum gilt:

9.14 Lemma: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Das kann man genau wie Lemma 9.12 beweisen, denn:

9.15 Notiz: Die Rechenregeln für Determinanten (D1, D2, D3 aus Satz 8.4, Verhalten unter Zeilen- und Spaltenrafos, Multiplikationssatz 8.7, Laplacescher Entwicklungssatz 8.9)

gelten allgemeiner für Matrizen mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R , solange wir „ $s \neq 0$ “ als $s \in R^\times$ interpretieren.

9.16 Satz: V endlich-dim., $f \in \text{GL}(V)$. Die EW von f sind genau die Nullstellen von χ_f .

Beweis:

Sei $a \in K$, B eine Basis von V .

a ist EW von f

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists v \neq 0: f(v) = \underbrace{a \cdot v}_{a \cdot \text{id}(v)}$$

$$\Leftrightarrow \exists v \neq 0: (f - a \cdot \text{id})(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ker(f - a \cdot \text{id}) \neq \{0\}$$

inj.-Kriterium

$$\Leftrightarrow f - a \cdot \text{id} \text{ nicht injektiv}$$

$$\stackrel{\text{Satz 5.14}}{\Leftrightarrow} f - a \cdot \text{id} \text{ kein Isomorphismus}$$

$$\Leftrightarrow {}_B M_B(f - a \cdot \text{id}) \text{ nicht invertierbar}$$

$$\stackrel{\parallel}{=} {}_B M_B(f) - a \cdot {}_B M_B(\text{id})$$

$$\stackrel{\parallel}{=} {}_B M_B(f) - a \cdot 1_n$$

$$\Leftrightarrow \det({}_B M_B(f) - a \cdot 1_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\det({}_B M_B(f) - X \cdot 1_n) \right)}_{\chi_f}(a) = 0$$

□

9.17 Rezept: EW & EV von f_A bestimmen:

$$K^n \supset f_A, \quad A \in \text{Mat}_K(n \times n)$$

1. Berechne $\chi_A(x) = \det(A - x \cdot \mathbb{1}_n) \in K[x]$
2. Bestimme alle Nullstellen $a_1, \dots, a_\ell$ von χ_A .
Das sind die EW von f .
3. Löse für jeden EW a_i das LGS
$$\underbrace{(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n)}_{n \times n\text{-Matrix}} \cdot \underline{z} = \underline{0}$$

$$\text{Es ist } \text{Eig}(f; a_i) = \mathcal{L}(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n).$$

□

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \supset f = f_A \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1. \chi_f &= \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{pmatrix} \\ &= (5-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} \\ &= (5-x) \cdot ((2-x)^2 - 1) \\ &= \dots \\ &= (5-x) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \end{aligned}$$

2. Die Eigenwerte von f sind 1, 3, 5.

(Im Allgemeinen muss man Nullstellen erraten und/oder Polynomdivision durchführen und/oder p-q-Formel, ...)

3. EW 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\cdot \frac{-1}{8} \right]_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(f; 5) = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R} \cdot \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

EW 1:

$$\text{Eig}(f; 1) = \dots = \mathbb{R} \cdot \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

EW 3:

$$\text{Eig}(f; 3) = \dots = \mathbb{R} \cdot \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Nach Kriterium 9.10 ist f diagonalisierbar.

Für $\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ist

$${}_{\mathcal{B}'} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9.18 Def.: Die *Spur* von $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii} \in K$$

Die *Spur* eines Endomorphismus $f \in \text{GL } V$ einer endlich-dim. VRs V ist

$$\text{tr}(f) := \text{tr}({}_B M_B(f))$$

für eine Basis B von V .

($\text{tr}(f)$ hängt nicht von B ab, siehe 9.20 unten).

9.19 Notiz: Koeffizienten des char. Polynoms

$A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ χ_A $\parallel$ $c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0$ $\deg \chi_A = n$ $c_n = (-1)^n$ $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(A)$ $c_0 = \det(A)$	$f \in \text{GL } V$ χ_f $\parallel$ $c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0$ $\deg \chi_f = \dim V$ $c_{\dim V} = (-1)^{\dim V}$ $c_{\dim V-1} = (-1)^{\dim V-1} \cdot \text{tr}(f)$ $c_0 = \det(f)$
---	--

Beweisidee: Rechnen mit Leibnizformel.

z.B. $n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - X \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} - X) \cdot (a_{22} - X) - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$= (-1)^2 \cdot X^2 + (-1) \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{tr}(A)} X + \underbrace{(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})}_{\det A}$$

□

9.20 Korollar (aus 9.14 & 9.19):

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.