

9. Diagonalisierbarkeit

9.1 Def.: Matrizen $A, A' \in \text{Mat}_K(m \times n)$ sind äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in \text{Mat}_K(m \times m)$ $T \in \text{Mat}_K(n \times n)$

gibt mit

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Quadratische Matrizen $A, A' \in \text{Mat}_K(n \times n)$ sind ähnlich („endo-äquivalent“), wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \text{Mat}_K(n \times n)$

gibt mit

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Notiz: Äquivalenz und Ähnlichkeit definieren jeweils Äquivalenzrelationen auf $\text{Mat}_K(m \times n)$ bzw. $\text{Mat}_K(n \times n)$.
[...]

Notiz: äquivalent $\Leftrightarrow$ ähnlich

Beispiel: $\left. \begin{array}{l} A \text{ invertierbar} \\ A' \text{ nicht} \end{array} \right\} \Rightarrow A, A' \text{ weder äquivalent noch ähnlich}$

9.2 Notiz (abstrakte Sichtweise)

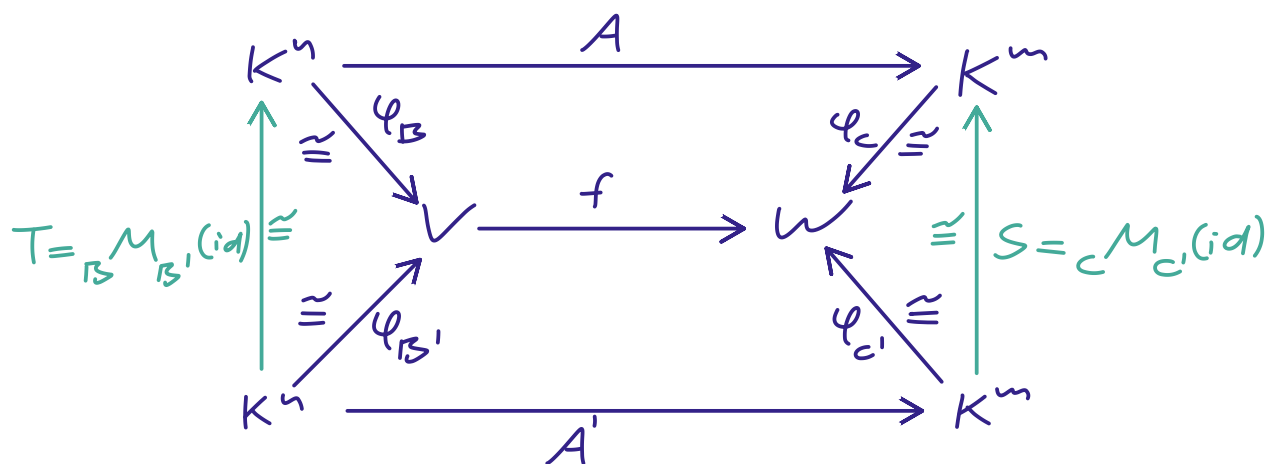
A, A' äquivalent

$\Leftrightarrow A$ und A' stellen bezüglich geeigneter Basen dieselbe Abb. dar:

$\exists$ lineare Abb. f , Basen B, B', C, C' , sodass:

$$A = {}_C M_B(f)$$

$$A' = {}_{C'} M_{B'}(f)$$



Satz 9.3 (Äquivalenz Konkret):

(a) Für $A, A' \in \text{Mat}_K(n \times m)$ gilt:

$$A, A' \text{ äquivalent} \Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk } A'$$

(b) Insbesondere ist jede Matrix $A \in \text{Mat}_K(n \times m)$ äquivalent zu genau einer Matrix in Normalform:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \underbrace{0 \dots 0}_r \end{array} & \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array} \end{array} \right) \quad (\text{mit } r = \text{rk } A).$$

Beweis: Kombiniere

- Satz 6.20: Zeilentransformation $\hat{=}$ Linksmult. mit Elementarm. Spaltentransformation $\hat{=}$ Rechtsmult. " "
- Satz 6.26: Normalform lässt sich durch Zeilen- und Spaltentransformationen erreichen
- Korollar 6.22: Transformatoren ändern Rang nicht. $\square$

9.2 Notiz, Forts.:

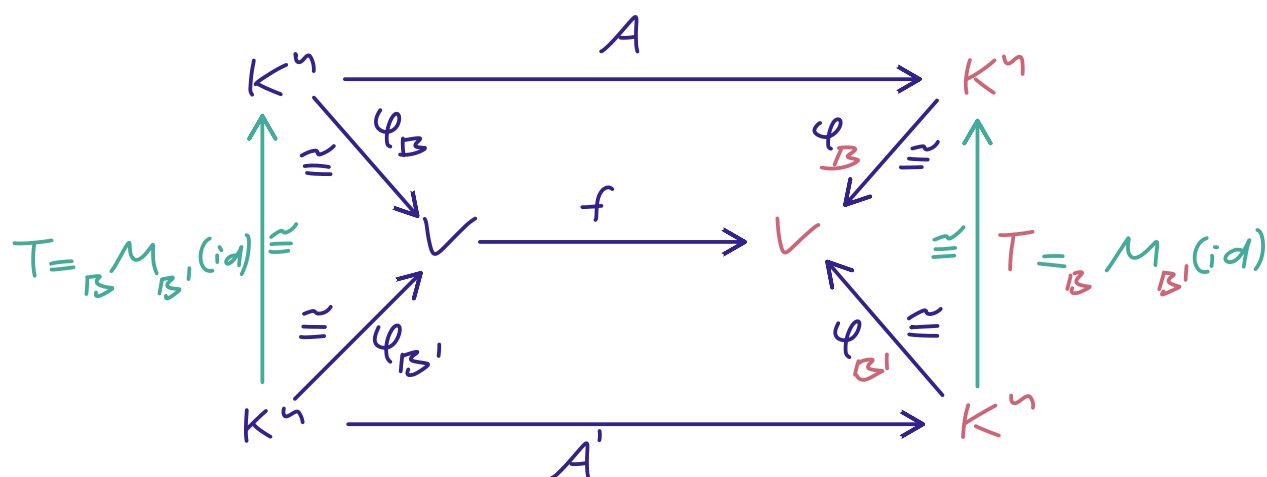
A, A' ähnlich

$\Leftrightarrow A$ und A' stellen bezüglich geeigneter Basen dieselbe Abb. dar:

$\exists$ lineare Abb. f , Basen $B, B', \cancel{C}, \cancel{C'}$, sodass:

$$A = {}_B M_B(f)$$

$$A' = {}_{B'} M_{B'}(f)$$



Ziel: ähnlich konkrete Beschreibung von
Ähnlichkeit wie in Satz 9.3 – werden sehen:

a: A, A' ähnlich

$$\Rightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A', \det A = \det A' \quad (9.12),$$

A und A' haben dasselbe char. Polynom (9.14).

b: Manche Matrizen sind ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in K$

9.4 Def.: Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a_i \in K$$

$A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist **diagonalisierbar**, falls sie **ähnlich** ist zu einer Diagonalmatrix.

Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ (auf einem endlich-dim. VR V) ist **diagonalisierbar**, falls es eine Basis B von V gibt, sodass ${}_B M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist (äquivalent: falls für eine/jede Basis B die Matrix ${}_B M_B(f)$ diagonalisierbar ist).

Beispiel:

$$K^n \ni \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Eigen-} \\ \text{vektor} \\ \text{von } a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \cdot \underline{e_i} \quad \text{Eigenwert von } A$$

9.5 Def.: $f: V \longrightarrow V$ Endomorphismus

$\alpha \in K$ ist **Eigenwert (EW)** von f , falls es $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$ gibt, sodass gilt:

$$f(\underline{v}) = \alpha \cdot \underline{v}$$

$\underline{v}$ heißt dann **Eigenvektor (EV)** zum EW α .

Der **Eigenraum** von f zu $\alpha \in K$ ist die Menge aller EV zu α zusammen mit 0 :

$$\text{Eig}(f; \alpha) := \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \alpha \cdot \underline{v} \}$$

$$\begin{aligned} \text{Notiz: } \text{Eig}(f; 0) &= \mathcal{L}(M(f)) \\ &= \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

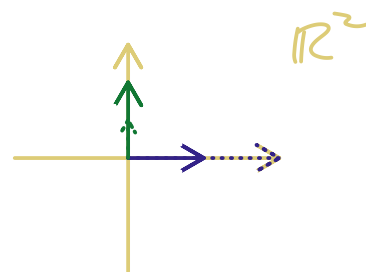
9.6 Notiz: Für einen Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ und eine Basis $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von V sind äquivalent:

⊢ $M_B(f)$ ist Diagonalmatrix
⊢ jedes $\underline{b}_i$ ist ein EV von f .

Inbesondere ist f genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis ex., die nur aus EV besteht.

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zum EW 2

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW $\frac{1}{2}$

(b) $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 3$$

Wählen wir also $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

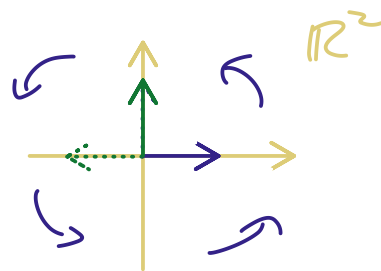
ist also

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

hat keine EV!

(insbesondere nicht
diagonalisierbar / $\mathbb{R}$)



(Rotation um 90°)



Selbst wenn f diagonalisierbar ist,
ist nicht jeder Vektor $\neq \underline{0}$ ein EV.
vgl. Bsp. (a):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{kein Vielfaches von } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.7 Lemma: Eigenräume sind UVR.

Beweis:

• $\underline{0} \in \text{Eig}(f; a)$, denn $f(\underline{0}) = \overset{f, \text{linear}}{\underline{0}} = a \cdot \underline{0}$.

• $\underline{v}, \underline{w} \in \text{Eig}(f; a)$, dann

$$f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$$

$$\overset{f \text{ linear}}{=} a \cdot \underline{v} + a \cdot \underline{w} = a \cdot (\underline{v} + \underline{w}).$$

Also $\underline{v} + \underline{w} \in \text{Eig}(f; a)$.

• $\underline{v} \in \text{Eig}(f; a)$, $s \in K$, dann auch $s \cdot \underline{v} \in \text{Eig}(f; a)$
[...]
□

9.8 Lemma: Ein Vektor kann EV zu höchstens einem EW sein:

$$\text{Eig}(f; a) \cap \text{Eig}(f; b) = \{\underline{0}\}$$

für $a \neq b$.

Beweis:

Für $\underline{v} \in \text{Eig}(f; a) \cap \text{Eig}(f; b)$ gilt:

$$b \cdot \underline{v} = f(\underline{v}) = a \cdot \underline{v}, \text{ also}$$

$$(a - b) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

Ist $a - b \neq 0$, so folgt $\underline{v} = \underline{0}$ (Notiz 4.2 (a))
□

9.9 Satz: $\forall f$ Endomorphismus.

EV $v_1, \dots, v_l$ von f zu paarweise verschiedenen
EW $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ (d.h. $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$)
sind linear unabhängig.

Beweis: Induktion über l

IA ($l=1$): Per Def. von EV ist $v_1 \neq 0$,
somit (v_1) linear unabh.

IS: Fixiere l .

Ind.-Annahme: $v_1, \dots, v_{l-1}$ linear unabh.

Sei $\sum_{i=1}^l s_i \cdot v_i = 0$ für gewisse $s_i \in K$.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^l s_i \cdot \lambda_i \cdot v_i = 0$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^l s_i \cdot \lambda_l \cdot v_i = 0$$

Differenz aus (1) & (2):

$$\sum_{i=1}^{l-1} s_i \cdot (\lambda_i - \lambda_l) \cdot v_i = 0$$

Aus der Induktionsannahme folgt nun:

$$s_i \cdot (\lambda_i - \lambda_l) = 0 \quad \text{für } i=1, \dots, l-1.$$

$$\neq 0 \quad \text{für } i=1, \dots, l-1.$$

Da $\lambda_i - \lambda_l \neq 0$, folgt:

$$s_i = 0 \quad \text{für } i=1, \dots, l-1.$$

Eingesetzt in Ausgangsgleichung erhalten wir:

$$s_l \cdot \underbrace{v_l}_{\neq 0} = 0,$$

also

$$s_l = 0.$$

□

9.10 Geometrisches Diagonalisierbarkeitkriterium

Seien $a_1, \dots, a_\ell$ die verschiedenen EW eines Endomorphismus $f \in \text{GL } V$; V endlich-dim.

Dann ist

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i)$$

und es gilt:

(a) f diagonalisierbar



$$(b) \quad \bigoplus_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i) = V$$

Theorie



$$(c) \quad \sum_{i=1}^{\ell} \dim(\text{Eig}(f; a_i)) = \dim V$$

$\uparrow$
in $\mathbb{N}$

Praxis

Erinnerung: Betrachte die Eigenräume als UVR von $\sum_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i)$. Die Gleichung (*) bedeutet (aut Def. 4.21, dass die Abb.

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i) &\longrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(f; a_i) \\ (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell) &\longmapsto \sum_i \underline{v}_i \end{aligned}$$

ein Iso ist. Laut Notiz 4.22 ist das äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \text{für alle } (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_\ell) \text{ mit } \underline{v}_i \in \text{Eig}(f; a_i) \text{ gilt:} \\ \sum_{i=1}^{\ell} \underline{v}_i = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_1 = \dots = \underline{v}_\ell = \underline{0}. \end{aligned}$$

Beweis:

(*) folgt sofort aus Erinnerung & Satz 9.9.

Zu zeigen ist also:

$$(a) \Leftrightarrow \underbrace{\sum_i \text{Eig}(f; q_i)}_{\#} = V \Leftrightarrow (c)$$

($a \Rightarrow \#$) f ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus EV von f besitzt (Notiz 9.7? 6?); insbesondere erzeugen also alle EV den gesamten VR V .

($a \Leftarrow \#$) Nach Annahme besitzt V ein Erzeugendensystem aus EV. Wähle daraus eine Basis.

($\# \Leftrightarrow c$) Erinnerung:

5.14 Dimensionsformeln

V, V_1, V_2 endlich-erzeugt; U UVR von V

(a) $\dim U \leq \dim V$, und
 $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$

(d) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$$\begin{aligned} \dim(\sum_i \text{Eig}(f; q_i)) &\stackrel{(*)}{=} \dim(\oplus_i \text{Eig}(f; q_i)) \\ &\stackrel{5.14(d)}{=} \sum_i \dim \text{Eig}(f; q_i) \end{aligned}$$

Benutze nun 5.14 (a).

□