

8.4 Satz (Charakterisierung der Determinante)

Die Determinante ist die einzige Abb.

$$\text{Mat}_K(n \times n) \longrightarrow K$$

mit den folgenden 3 Eigenschaften:

- (D1) multilinear
 - (D2) alternierend
 - (D3) normiert: $\det(1_n) = 1$.
- } in den Zeilen

Schreibe im Folgenden ausnahmsweise Vektoren aus K^n als Zeilen.

D1 bedeutet:

Wenn wir alle Zeilen $a_1, \dots, \cancel{a_j}, \dots, a_n$ außer a_j fixieren, ist die Abb.

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K \\ \omega & & \\ a_j & \longmapsto & \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array}$$

linear (für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$).

D2 bedeutet:

Sind zwei Zeilen identisch (also $a_j = a_k$ für ein Paar (j, k) mit $j \neq k$), so ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

Lemma 8.5: Aus (D1) & (D2) folgt für beliebige $\sigma \in S_n$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei $f: \operatorname{Mat}_K(n \times n) \longrightarrow K$ beliebige Abb., die (D1) & (D2) erfüllt. Zu zeigen ist:

$$f \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Der wesentliche Fall ist der Fall $n=2$, $\sigma = (1\ 2)$. In diesem Fall ist zu zeigen:

$$f \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Das folgt aus:

$$\begin{aligned} 0 &= f \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} && \text{(D2)} \\ &= f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} && \text{(D1)} \\ & && (i=1) \\ &= \underbrace{f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (D2)}} + f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \underbrace{f \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (D2)}} + f \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} && \text{(D1)} \\ & && (i=2) \\ &= f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt daraus, dass sich $\sigma \in S_n$ zerlegen lässt in Transpositionen τ_i ,

also $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$ [siehe nach Satz 2.30],
 und $\text{sgn}(\sigma) = \underbrace{\text{sgn}(\tau_1)}_{-1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\text{sgn}(\tau_m)}_{-1}$ □

Notiz 8.6: Wegen $\det(A^T) = \det(A)$

(8.3) gilt Charakterisierung 8.4 ebenso für Spalten wie für Zeilen:

$\left. \begin{array}{l} (D1^T) \text{ det multilinear} \\ (D2^T) \text{ det alternierend} \end{array} \right\} \text{ in Spalten}$

Für die Berechnung der Det. bedeutet Charakt. 8.4:

(VERT.) Beim Vertauschen zweier Zeilen/Spalten wechselt das Vorzeichen (8.5).

(SKALIEREN) Skalieren wir eine Zeile/Spalte um einen Faktor $s \in K$, ändert sich Determinante genau um diesen Faktor (D1).

(ADD.) Addieren wir ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte, ändert sich die Determinante nicht.

(Das folgt aus D1 & D2, z.B.:

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 + s \cdot \underline{a}_1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_1 \end{pmatrix}}_{\substack{= 0 \\ (D2)}} \\
 &\stackrel{\substack{D1 \\ (j=2)}}{=} \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow^{-3} \\ \searrow^{-3} \end{matrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow^+ \\ \searrow \end{matrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix}$$

$$= + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bsp. 8.2 (e)

$$\searrow = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$= -6$$

Beweis zu 8.4, Teil 1: $\det$ hat diese Eigenschaften

$$D3: \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1^n = 1$$

↑ Bsp. 8.2 (e)

D1: Seien $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{a}_j'$ Zeilenvektoren, also $\underline{a}_i = (a_{i1} \dots a_{in})$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j + \underline{a}_j' \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{i\sigma(i)} (a_{j\sigma(j)} + a_{j'\sigma(j)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j\sigma(j)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j'\sigma(j)} \\ &= \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j' \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ s \cdot \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n a_{i\sigma(i)} \cdot (s \cdot a_{j\sigma(j)}) \\ &= s \cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n a_{i\sigma(i)} \cdot a_{j\sigma(j)} \right) \\ &= s \cdot \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DZ: Sei $a_j = a_k$ für ein Paar $j \neq k$.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_+} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in S_-} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma'(i)}$$

$$\text{mit } S_+ := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) > \sigma(k)\} \\ S_- := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) < \sigma(k)\}$$

= 0, denn:

- Wir haben eine Bijektion

$$S_+ \xrightarrow{\cong} S_- \\ \sigma \mapsto \sigma' := (\sigma(j) \sigma(k)) \circ \sigma \\ (\sigma(j) \sigma(k)) \circ \sigma' \leftarrow \sigma'$$

- Unter dieser Bijektion gilt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma') = \overbrace{\operatorname{sgn}(\sigma(j) \sigma(k))}^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) \\ = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma'(i)} &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^n a_{i\sigma'(i)} \right) \cdot a_{j\sigma'(j)} \cdot a_{k\sigma'(k)} \\ &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^n a_{i\sigma(i)} \right) \cdot a_{j\sigma(k)} \cdot a_{k\sigma(j)} \\ &= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^n a_{i\sigma(i)} \right) \cdot \overset{\parallel a_j = a_k \parallel}{a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)}} \\ &= \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \end{aligned}$$

Also unterscheidet sich der zu σ' gehörige Summand von dem zu σ gehörigen Summand nur um ein Vorzeichen.

Beweis zu 8.4, Teil 2: $\det$ ist einzigartig.

Sei $f: \text{Mat}_K(n \times n) \longrightarrow K$ eine Abb.

mit den Eigenschaften (D1), (D2), (D3).

Schreibe $\underline{e}_j = (0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0)$

(zz.: $f = \det$)

$$f \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \sum_{j_1} a_{1j_1} \cdot \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} \cdot \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \text{für D1} \\ \text{Zeile 1}}}{=} \sum_{j_1} a_{1j_1} \cdot f \begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \sum_{j_2} a_{2j_2} \cdot \underline{e}_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j_n} a_{nj_n} \cdot \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \text{für D1} \\ \text{Zeile 2}}}{=} \dots$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \text{für D1} \\ \text{Zeile } n}}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_i \in \{1, \dots, n\}}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \cdot f \begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{D2}}{=} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \\ j_i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{alle } j_i \text{ verschieden}}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \cdot f \begin{pmatrix} \underline{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \underline{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \sigma(i) = j_i \uparrow}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot f \begin{pmatrix} \underline{e}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \underline{e}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \text{D2} \\ \text{Lemma 8.5}}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot f \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \vdots \\ \underline{e}_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \cdot \underbrace{f(1_n)}_1$$

Lemma 8.5

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

□