

8 Determinante

8.1 Def.: Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(n \times n)$ ist definiert durch die Leibniz-Formel:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

↑
Def. 2.27

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, \dots, n\}$$

$$\text{sgn}: S^n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

8.2 Beispiele:

(a) $\det(a_{11}) = a_{11}$
 $S_1 = \{\text{id}\}$

(b) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
 $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau} \right\}$$

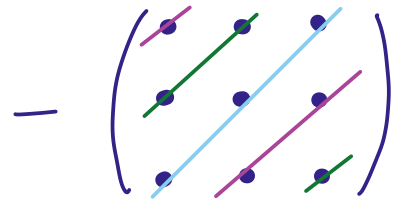
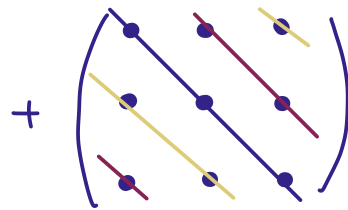
+ -

$$(c) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

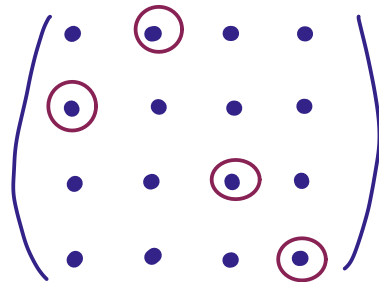
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$S_3 = \{ \text{id}, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3), (12), (1\ 3), (23) \}$$

+ + + - - -



(d) $\det(4 \times 4\text{-Matrix}) = \dots$ besser anders ausrechnen ...



(e)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

($a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ ist Summand zu $\sigma = \text{id}$.

Für jedes $\sigma \neq \text{id}$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$

mit $\sigma(i) < i$. Für dieses i ist

$a_{i\sigma(i)} = 0$, daher verschwindet der entsprechende Summand.)

(f) analog: untere Dreiecksmatrix.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(g) Ähnlich sieht man:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C).$$

A, C quadratisch

8.3 Lemma: $\det(A^T) = \det(A)$

Beweis:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

$\underbrace{\sigma(i)}_j \uparrow \sigma^{-1}(j)$

Umbenennung
von $\sigma(i)$ in j $\nearrow$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j \underbrace{\sigma^{-1}(j)}_{\sigma}}$$

$\uparrow$
 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$
da $\operatorname{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$
Gruppenhomom.

Umbenennung
von σ in
 σ^{-1} $\nearrow$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j \sigma(j)} = \det(A)$$

□