

7. Matrizen II

Bisher: $K^n \longrightarrow K^m$ mit Standardbasen auf K^n & K^m .

Jetzt: $V \longrightarrow W$
(oder: $K^n \longrightarrow K^m$ mit anderen Basen)

Basen müssen i.A. gewählt werden!

Beispiel:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \right\}$$

hat Basen $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

usw. usf.

$\text{Mat}(2 \times 2)$ hat Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{und } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

usw. usf.

7.1 Satz: Eine lineare Abb. ist eindeutig bestimmt durch die Bilder einer Basis:

Ist $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V ,

$C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n)$ beliebiges Tupel in W ,

so existiert genau eine lineare Abb. $f: V \rightarrow W$ mit $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \ \forall i$.

Beweis:

Argumentiere wie im Beweis zum Hauptsatz, Teil II (6.4):

Jedes $\underline{v} \in V$ besitzt eindeutige Darstellung der Form

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i \quad \text{mit } s_i \in K.$$

Definiere f durch

$$f(\underline{v}) := \sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{c}_i$$

Das ist wohldef. wegen Eindeutigkeit der s_i , und erfüllt offenbar $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$.

Ferner ist f linear [...].

Diese Abb. ist ferner eindeutig:

Ist g irgendeine lineare Abb. $g: V \rightarrow W$ mit $g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$, so folgt:

$$\begin{aligned} g(\underline{v}) &= g\left(\sum_{i=1}^n s_i \cdot \underline{b}_i\right) \\ &= \sum_i s_i \cdot g(\underline{b}_i) \end{aligned}$$

$\nearrow$ g linear

$$= \sum_i s_i \cdot \underline{c}_i = f(\underline{v}).$$

$\nearrow$ $g(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$

□

7.2 Notation: Ist $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V ,
so sei φ_B die nach 7.1 eindeutige lineare Abb.

$$\varphi_B: K^n \xrightarrow{\cong} V$$

Standard-basis $\nearrow \underline{e}_i \mapsto \underline{b}_i$
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_i x_i \cdot \underline{b}_i$

Ist $V = K^n$, so ist $\varphi_B = f_B$, also Multiplikation mit der Matrix $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$.

Ist allgemeiner $V \subseteq K^N$ ein n -dim. UVR,
so können wir eine Basis $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$
von V auffassen als $N \times n$ -Matrix auffassen
(von vollem Rang n). Dann ist $i \circ \varphi_B = f_B$.

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow[\cong]{\varphi_B} & V \\ & \searrow f_B & \downarrow i \\ & & K^N \end{array}$$

7.3 Def.: Sei $f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.
zwischen VR der Dimensionen n bzw. m .
Seien B und C Basen von V bzw. W .
Die Matrix zu f bezüglich B und C

ist die Matrix zur linearen Abb. $\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B$:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\quad M_B(f) \quad} & K^m \\ \varphi_B \searrow \cong & & \cong \swarrow \varphi_C \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

7.4 Satz: Die Einträge der Matrix

${}_C M_B(f) = (m_{ij})_{ij}$ erfüllen die Gleichung

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i$$

und sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir können also aus Spalte j von ${}_C M_B(f)$ das Bild von $\underline{b}_j$ unter f ablesen.

Beweis: Per Def. sind die m_{ij} eindeutig bestimmt durch

$$(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B)(\underline{e}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{e}_i$$

(siehe Beweis zu Satz 6.4).

Wende nun φ_C an:

$$f(\underbrace{\varphi_B(\underline{e}_j)}_{\underline{b}_j}) = \sum_i m_{ij} \underbrace{\varphi_C(\underline{e}_i)}_{\underline{c}_i}$$

□

Beispiele:

(a) $V = K^n$, $W = K^m$, B, C Standardbasen.

Dann ist $\varphi_B = \text{id}$, $\varphi_C = \text{id}$,

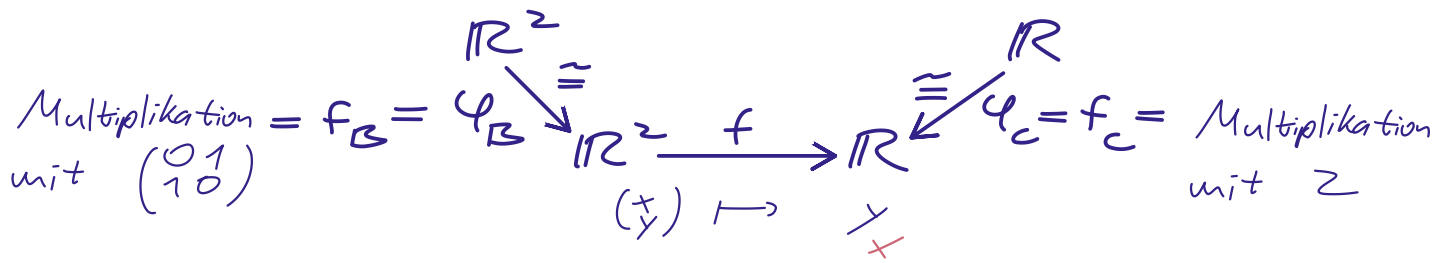
und ${}_C M_B(f)$ ist die zu f gehörige Matrix im Sinne von Satz 6.4.

Wir schreiben in diesem Fall kurz $M(f)$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$ mit Basis $B := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$W = \mathbb{R}$ mit Basis $C := \left(\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right)$.

$f: V \rightarrow W$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$



$$\begin{aligned} M(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}_C M_B(f) &= M(f_C^{-1} \circ f \circ f_B) \\ &= M(f_C)^{-1} \cdot M(f) \cdot M(f_B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.5 Satz: Sei $\dim V = n$, B Basis von V ,
(vgl. Satz 6.7) $\dim W = m$, C Basis von W .

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Mat}_K(m+n) & \xleftarrow{\quad} & \text{Hom}_K(V, W) \\ \downarrow \scriptstyle B & \swarrow \scriptstyle \leftarrow 1 & \downarrow \scriptstyle f \\ M_C(f) & & f \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von K -VR.

Beweis: Die Abbildung ist die Komposition folgender Isomorphismen:

$$\text{Mat}_K(m+n) \underset{(6.7)}{\cong} \text{Hom}_K(K^n, K^m) \cong \text{Hom}_K(V, W)$$

$$\begin{array}{ccc} S & \mapsto & f_S \mid g \mapsto \psi_C \circ g \circ \psi_B^{-1} \\ M(f) & \longleftarrow & f \mid \psi_C^{-1} \circ f \circ \psi_B \longleftarrow f \end{array}$$

7.6 Satz (vgl. 6.9):

Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ lineare Abb.,
 $A \quad B \quad C$ Basen.

Dann ist

$${}_C M_A(f \circ g) = {}_C \underline{M}_B(f) \cdot \underline{{}_B M}_A(g)$$

Beweis:

Wir wissen bereits:

$$(*) \quad M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$$

im Fall $U = K^o$, $V = K^n$, $W = K^m$

(mit Standardbasen), siehe 6.9/6.10.

Daher folgt:

$$\begin{aligned} {}_C M_A(f \circ g) &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ g \circ \varphi_A) \\ &= M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B \circ \varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &\stackrel{(*)}{=} M(\varphi_C^{-1} \circ f \circ \varphi_B) \cdot M(\varphi_B^{-1} \circ g \circ \varphi_A) \\ &= {}_C \underline{M}_B(f) \cdot \underline{{}_B M}_A(g). \end{aligned}$$

□

Vergleichsübersicht

Kapitel 6:

Basis
 $e_1, \dots, e_n$

Basis
 $e_1, \dots, e_m$

$$\text{Mat}_K(m \times n) \cong \text{Hom}_K(K^n, K^m)$$

$$S \mapsto (f_S : x \mapsto S \cdot x)$$

$$M(f) \leftarrow f$$

$$(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Eintrag i in Spalte j
ist also Koeffizient
 m_{ij} von e_i in

$$f(e_j) = \sum_i m_{ij} e_i$$

Kapitel 7:

Basis

$$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$$

Basis

$$C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m)$$

K^n

$$\varphi_B \cong$$

K^m

$$\cong \varphi_C$$

$$\text{Mat}_K(m \times n) \cong \text{Hom}_K(V, W)$$

$$S \mapsto \varphi_C \circ f_S \circ \varphi_B^{-1}$$

$${}_C M_B(f) \leftarrow f$$

7.4: Eintrag i in Spalte j
ist Koeffizient
 m_{ij} von $\underline{c}_i$ in

$$f(\underline{b}_j) = \sum_i m_{ij} \underline{c}_i$$