

6.30 Def.:

Die Transponierte einer $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ ist die $n \times m$ -Matrix $A^T = (a_{ji})_{ij}$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.31 Lemma:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(s \cdot A)^T = s \cdot A^T$ für $s \in K$

(d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (vgl. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$)

(e) A invertierbar $\Leftrightarrow A^T$ invertierbar.

In diesem Fall ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: a-c: klar

d: Schreibe A_{ij} für Eintrag in Zeile i , Spalte j der Matrix A .

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^T &= \left[\left(\sum_j A_{ij} \cdot B_{jk} \right)_{i,k} \right]^T \\ &= \left[\left(\sum_j A_{kj} \cdot B_{ji} \right)_{i,k} \right] \\ &= \left[\left(\sum_j B_{ji} \cdot A_{kj} \right)_{i,k} \right] \\ &= \left[\left(\sum_j (B^T)_{ij} (A^T)_{jk} \right)_{i,k} \right] = B^T \cdot A^T \end{aligned}$$

e: folgt aus d.

□

6.32 Def.: Sei $A = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n) = \begin{pmatrix} \underline{z}_1^T \\ \vdots \\ \underline{z}_m^T \end{pmatrix}$ ← Zeilen
↑ Spalten
 $\in \text{Mat}_K(m \times n).$

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim_K \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle$$

$$\text{Zeilenrang}(A) := \dim_K \langle \underline{z}_1, \dots, \underline{z}_m \rangle$$

6.33 Rangsatz: Für jede Matrix gilt:
 $\text{Spaltenrang} = \text{Rang} = \text{Zeilenrang}$

Beweis: $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$, $f_A: K^n \longrightarrow K^m$
 (Spaltenrang = Rang)

Für Standardbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von K^n gilt:

$$f_A(\underline{e}_i) = A \cdot \underline{e}_i = \underline{s}_i$$

$$\text{Daher } \text{im } f_A = f_A(\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle)$$

$$\stackrel{\text{Blatt 7 Aufgabe 1(c)}}{=} \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \rangle \stackrel{\text{green arrow}}{=} \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle$$

$$\text{Also ist } \text{rk}(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \dim(\text{im } f_A) \\ = \dim \langle \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Spaltenrang}(A).$$

(Spaltenrang = Zeilenrang)

3 Vorüberlegungen

(i) Spaltenrang = Zeilenrang, falls A in Normalform ist:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Hier:

$$\text{Spaltenrang} = \dim \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r \rangle = r.$$

$$\text{Zeilenrang} = \dim \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r \rangle = r. \quad \left. \begin{array}{l} \text{green arrow} \text{ in } K^m \\ \text{green arrow} \text{ in } K^n \end{array} \right\}$$

(ii) (Spalten)Rang ist invariant unter Zeilen- und Spaltentrafos (Korollar 6.22).

(iii) Zeilenrang ist auch invariant unter Zeilen- und Spaltentrafos:

Sei A' Matrix, die aus A durch solche Trafos hervorgeht. Dann ist $A' = E_e \cdot A \cdot E_r$ für Produkte von Elementarmatrizen E_e und E_r .

$$\begin{aligned} \text{Zeilenrang}(A') &= \text{Spaltenrang}((A')^T) \\ &= \text{Spaltenrang}((E_e \cdot A \cdot E_r)^T) \\ &= \text{Spaltenrang}(\underbrace{E_r^T \cdot A^T \cdot E_e^T}_{\substack{\text{Produkte von} \\ \text{Elementarmatrizen}}}) \\ &\stackrel{\text{6.31(d)}}{=} \text{Spaltenrang}(A^T) \\ &\stackrel{\text{Korollar 6.22}}{=} \text{Zeilenrang}(A). \end{aligned}$$

Sei nun A beliebige Matrix. Wähle E_e und E_r so, dass $E_e \cdot A \cdot E_r$ in Normalform ist (möglich nach Satz 6.26(b)). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spaltenrang}(A) &\stackrel{\text{(ii)}}{=} \text{Spaltenrang}(E_e \cdot A \cdot E_r) \\ &\stackrel{\text{(i)}}{=} \text{Zeilenrang}(E_e \cdot A \cdot E_r) \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{=} \text{Zeilenrang}(A) \end{aligned}$$

□

6.34 Def.: $A \in \text{Mat}(m \times n)$ hat ...

... vollen Zeilenrang, falls $\text{rk}(A) = m$.

... vollen Spaltenrang, falls $\text{rk}(A) = n$.

... vollen Rang, falls sie vollen Zeilen- oder Spaltenrang besitzt.

Beispiel:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

voller Spaltenrang

voller Rang

(Zeilenrang nicht voll)

6.35 Satz:

(a) A hat vollen Zeilenrang

$\Leftrightarrow A$ besitzt Rechtsinverses

(b) A hat vollen Spaltenrang

$\Leftrightarrow A$ besitzt Linksinverses

(c) Ist $A \in \text{Mat}(n \times n)$ (also quadratisch)

sind beide Bedingungen äquivalent, und es folgt:

$\text{rk}(A) = n \Leftrightarrow A$ besitzt Linksinv.

$\Leftrightarrow A$ besitzt Rechtsinv.

$\Leftrightarrow A$ invertierbar.

Beweis:

b: folgt aus Rezept 6.29

a: folgt aus (b), denn A besitzt Rechtsinv.

$\Leftrightarrow A^T$ besitzt Linksinv.

6.31(d)

c: folgt aus a & b.

□

6.36 Satz:

Ein n -Tupel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ von Vektoren in K^m ist...

(a) ... ein Erzeugendensystem von K^m $\Leftrightarrow (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \in \text{Mat}(m \times n)$ hat vollen Zeilenrang ($\text{rk} = m$)

(b) ... linear unabhängig $\Leftrightarrow (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Spaltenrang ($\text{rk} = n$)

(c) ... eine Basis $\Leftrightarrow (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ ist invertierbar (insbesondere $n = m$)

Beweis: Sei $A := (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$. Die lineare Abb.

$$f_A: K^n \longrightarrow K^m.$$

bildet Standardbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von K^n ab auf $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ in K^m .

a: $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ E-System $\stackrel{5.16(a)}{\Leftrightarrow} f_A$ surjektiv

$$\stackrel{\text{Def. rk}}{\Leftrightarrow} \text{rk}(f_A) = m$$

$\stackrel{6.35(a)}{\Leftrightarrow} (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Zeilenrang.

b: $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ linear unabh. $\stackrel{5.16(b)}{\Leftrightarrow} f_A$ injektiv

$$\stackrel{\text{Rangformel 5.17} + \text{inj.-Kriterium 4.17}}{\Leftrightarrow} \text{rk}(f_A) = n$$

vgl. Beh (*) in Beweis zu Rezept 6.29.

$\stackrel{6.35(a)}{\Leftrightarrow} (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ hat vollen Zeilenrang.

c: folgt.



