

6.29 Rezept: Matrix invertieren

Sei $A \in \text{Mat}_K(n \times n)$ gegeben (also A quadratisch).

Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_n)$$

durch Zeilentransformationen in eine Matrix

$$(A' \mid B'),$$

in der A' Zeilennormalform besitzt.

Falls $A' = \mathbb{1}_n$, so ist A invertierbar, mit

$$\text{Inversum } A^{-1} = B'.$$

Falls $A' \neq \mathbb{1}_n$, so ist A nicht invertierbar.

6.29' Rezept: Linksinverses finden

Sei $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$ gegeben. Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_m)$$

durch Zeilentransformationen in eine Matrix

$$(A' \mid B'),$$

in der A' Zeilennormalform besitzt

Falls $A' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}^m$, so bilden die ersten

n Zeilen $B'_{1,\dots,n}$ ein Linksinverses von A
(d.h. $B'_{1,\dots,n} \cdot A = \mathbb{1}_n$).

Falls $A' \neq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$, so besitzt A kein Linksinverses.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \cdot 6 \\ \downarrow (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A'} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{B'} \end{array} \quad B'_{1,2}$$

Probe: $B'_{1,2} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓



Linksinverse sind i.A. nicht eindeutig,

z.B. auch $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis, dass Rezept 6.29 / 6.29' funktioniert:

Satz 6.20: Zeilenrafo $\hat{=}$ Linksmultiplikation mit einem Produkt E von Elementarmatrizen.

Also: (a) $A' = E \cdot A$

und (b) $B' = E \cdot \mathbb{1}_m$, also $B' = E$.

Falls $A' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$, erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} = A' \stackrel{a}{=} E \cdot A \stackrel{b}{=} B' \cdot A.$$

Die ersten n Zeilen dieser Gleichung liefern Beh.

$$1_n = B_{1,\dots,n}^1 \cdot A$$

Beachte nun:

$$(*) \text{ Beh.: } A^1 = \begin{pmatrix} 1_n \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_A \text{ injektiv}$$

Beweis:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1_n \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Rezept} \\ 6.27}}{\Leftrightarrow} \text{rk}(A) = n$$

$$\stackrel{\substack{\text{Rangformel} \\ 5.17}}{\Leftrightarrow} \dim(\ker f_A) = 0$$

$$\stackrel{\substack{\text{inj.-Kriterium} \\ 4.17}}{\Leftrightarrow} f_A \text{ injektiv}$$

nach Vorlesung
vereinfacht
& ergänzt

△

Ist zusätzlich A quadratisch (also $m=n$), so folgt in obiger Situation, dass A invertierbar ist mit Inversen $A^{-1} = B_{1,\dots,n}^1$:

Aus f_A injektiv und $n=m$ folgt mit Korollar 5.19, dass f_A ein Isomorphismus und somit A invertierbar ist, und

$$A^{-1} = \overbrace{B_{1,\dots,n}^1}^{1_n} \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{1_n} = B_{1,\dots,n}^1$$

Falls andererseits $A^1 \neq \begin{pmatrix} 1_n \\ 0 \end{pmatrix}$, folgt aus Beh. (*) dass f_A nicht injektiv ist, und somit kein Linksinverses besitzen kann (Blatt 3, Aufgabe 1). □