

## 6.28 Rezept: LGS lösen

Sei LGS  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  gegeben.

SCHRITT 1:

Überführe erweiterte Matrix  $(A|\underline{b})$  durch Zeilentransformation in Matrix  $(A'|\underline{b}')$ , in der  $A'$  Zeilenstufenform hat (z.B. mit Verfahren aus 6.24).

$$(A'|\underline{b}') = \left( \begin{array}{cccc|c} \circ & \dots & \circ a_1 & * & * & b'_1 \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & a_2 \\ \vdots & & & & & \\ & & & \circ a_r & * & \dots & * & b'_r \\ \hline \circ & & & & & & \circ & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ \circ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \circ & b'_m \end{array} \right)$$

$a_i \neq 0$

Betrachte Zeilen  $r+1, \dots, m$ . Falls

$$\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} \neq \underline{0}, \text{ folgt } \mathcal{L}(A, \underline{b}) = \emptyset$$

FERTIG.

Falls  $\begin{pmatrix} b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} = \underline{0}$ , wirf Nullzeilen weg und fahre fort.

SCHRITT 2:

Überführe Matrix durch weitere Zeilentransformationen in Matrix  $(A'' | \underline{b}'')$  in Zeilennormalform. Nach Korollar 6,24 gilt

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \mathcal{L}(A'', \underline{b}'')$$

und das LGS  $A'' \cdot \underline{x} = \underline{b}''$  ist so übersichtlich, dass man alle Lösungen „zu Fuß“ bestimmen kann.

Alternativ:

SCHRITT 3:

Markiere Spalten von  $A''$ , in denen keine Pivots stehen. Ändere in diesen Spalten alle Vorzeichen.

SCHRITT 4:

Füge für jede markierte Spalte  $j$  eine neue Zeile der Form

$$(0 \dots 0 \underset{\uparrow \text{Spalte } j}{1} 0 \dots 0)$$

so in  $(A'', \underline{b}'')$  ein, dass die neuen 1en zusammen mit den Pivots eine vollständige Diagonale von  $A''$  bilden.

Die Matrix hat nun die Form:

The diagram illustrates the iterative steps of the Gauss-Jordan elimination algorithm. It shows a sequence of matrices where pivot elements are selected (highlighted in red boxes) and rows are swapped to move the pivot to the top-left position. The process continues until the matrix is in row echelon form, with the final step showing the matrix in reduced row echelon form.

Die markierten Spalten  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_e$  bilden nun eine Basis von  $\mathcal{L}(A)$  und die letzte Spalte ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

$$\mathcal{L}(A) = \langle \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_e \rangle$$

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \underline{\tilde{b}} + \langle \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_e \rangle$$

Beispiel:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$$

SCHRITT 1:  $(A|b)$  auf ZSF bringen

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

— ZSF

Einträge neben den Nullzeilen sind 0, also existieren Lösungen

Nullzeilen streichen:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

SCHRITT 2: ZNF

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-2) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & -1 & 0 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 8 \end{array} \right) \quad - \text{ZNF}$$

Alternative A:

$$\begin{array}{l} \wedge \quad \textcircled{x_1} + 2x_2 - x_4 + 8x_6 = -16 \\ \wedge \quad \textcircled{x_3} + 3x_4 = 8 \\ \wedge \quad \textcircled{x_5} - 3x_6 = 8 \end{array}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 - 2x_2 + x_4 - 8x_6 \\ 8 - x_2 - 3x_4 \\ 8 - x_4 + 3x_6 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Alternative B:

SCHRITT 3: Spalten ohne Pivots markieren & Vorzeichen ändern

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & -2 & 0 & +1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & +3 & 8 \end{array} \right)$$

SCHRITT 4: Zeilen einfügen

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & -2 & 0 & +1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & +3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3 \quad \tilde{b}$

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$  sind Basis von  $\mathcal{L}(A)$ ,

und

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \tilde{b} + \langle \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \rangle.$$

Beweis, dass Rezept 6.28 funktioniert:

Bis einschließlich Schritt 2 wissen wir aus

Korollar 6.24:  $\mathcal{L}(A'', \underline{b}'') = \mathcal{L}(A, \underline{b})$ .

Zu den Schritten 3 & 4:

Nummeriere, um Notation zu vereinfachen, Variablen so um, dass Pivot-Elemente

links stehen:

$$(A'', \underline{b}'') = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & & & & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1l} & b_1 \\ & \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \boxed{1} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{1} & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & a_{r1} & \cdots & a_{rl} & b_r \end{array} \right)$$

Durch Schritte 3 & 4 erhalten wir:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & & & & 0 & -a_{11} & \cdots & -a_{1l} & b_1 \\ & \boxed{1} & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \boxed{1} & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{1} & & -a_{r1} & \cdots & -a_{rl} & b_r \\ 0 & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Algorithmus liefert also:

$$\tilde{\underline{g}}_i = \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i=1, \dots, l; \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \underline{e}_i \in K^l$

Zu zeigen:

- (a)  $\tilde{\underline{g}}_i \in \mathcal{L}(A'')$
- (b)  $\tilde{\underline{g}}_1, \dots, \tilde{\underline{g}}_l$  bilden Basis von  $\mathcal{L}(A'')$
- (c)  $\tilde{\underline{b}} \in \mathcal{L}(A'', \underline{b}'')$ .

zu a:

$$\begin{aligned}
 A'' \cdot \tilde{g}_i &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{e}_i \\
 &= \begin{pmatrix} -a_{1i} \\ \vdots \\ -a_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ri} \end{pmatrix} = \underline{0}
 \end{aligned}$$

zu b:  $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_\ell$  sind linear unabhängig, da  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_\ell$  linear unabhängig sind.

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 \dim(\mathcal{L}(A'')) &= (r+\ell) - \text{rk}(A'') \\
 &= (r+\ell) - r \quad \text{Rezept 6.27} \\
 &= \ell
 \end{aligned}$$

Also bilden  $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_\ell$  nach Basiskriterium 5.13 eine Basis von  $\mathcal{L}(A'')$ .

zu c:

$$\begin{aligned}
 A'' \cdot \tilde{b} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{1} & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\ell} \end{pmatrix} \cdot \underline{0} \\
 &= \underline{b''}.
 \end{aligned}$$

□