

Lineare Gleichungssysteme

6.14 Def.: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist eine Gleichung der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

für eine Matrix $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$, $\underline{x} \in K^n$, $\underline{b} \in K^m$.

Explizit:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind $A = (a_{ij})_{ij}$ und $\underline{b} = (b_i)_i$

vorgegeben und gesucht werden alle möglichen Werte für $\underline{x}$:

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) := \{ \underline{x} \in K^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \} \quad \text{Lösungsraum}$$

$$\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A, \underline{0})$$

Ein LGS mit $\underline{b} = \underline{0}$ heißt homogen.

6.15 Satz.: Für jedes $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$ ist
 $\mathcal{L}(A) \subseteq K^n$
 ein UVR der Dimension
 $n - \text{rk}(A)$.

Beweis:

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in K^n \mid \underbrace{A \cdot x}_{f_A(x)} = \underline{0}\} = \text{Ker}(f_A)$$

ist ein UVR nach Satz 4.16.

Nach der Rangformel 5.17 gilt ferner:

$$\underbrace{\text{rk}(f_A)}_{\text{rk}(A)} = n - \dim(\text{Ker } f_A).$$

□

6.16 Korollar: Jedes homogene LGS mit
 mehr Unbekannten als Zeilen ($n > m$)
 besitzt mindestens eine Lösung $x \neq \underline{0}$.

Beweis: $\text{im}(f_A) \subseteq K^m$, also ist

$$\text{rk}(A) = \dim(\text{im}(f_A)) \leq m$$

Also folgt aus 6.15:

$$\dim \mathcal{L}(A) = n - \text{rk}(A) \geq n - m > 0 \quad \square$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

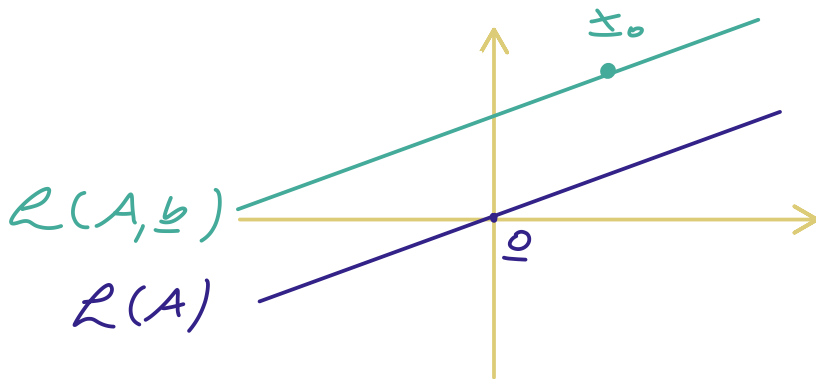
$$n=3 > 2=m$$

Eine Lösung $\neq \underline{0}$ ist z.B. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6.17 Satz: Betrachte LGS $A \cdot x = \underline{b}$.
Existiert eine Lösung $\pm_0 \in \mathcal{L}(A, \underline{b})$, so ist

$$\mathcal{L}(A, \underline{b}) = \pm_0 + \mathcal{L}(A)$$

(Nebenklasse von $\mathcal{L}(A)$ in K^n)



Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \underline{b}) &= f_A^{-1}(\underline{b}) = f_A^{-1}(f_A(\pm_0)) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.23}}{=} \pm_0 + \ker(f_A) \\ &= \pm_0 + \mathcal{L}(A) \end{aligned}$$

□

Beispiele über $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 1 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 6 \\ 1 \cdot x_2 &= 1 \end{aligned}$$

//

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

6.18 Def: Eine elementare Zeilentransformation erzeugt aus $A \in \text{Mat}_K(m \times n)$ eine neue Matrix $A' \in \text{Mat}_K(m \times n)$ durch ...

(VERTAUSCHEN) Vertauschen zweier Zeilen
oder

(SKALIEREN) Skalarmultiplikation einer Zeile
mit einem $s \in K^\times$! $s \neq 0$!
oder

(ADDITION) Addition des s -fachen einer
Zeile ($s \in K$) zu einer anderen
Zeile.

Eine Zeilentransformation ist eine Verkettung endlich vieler elementaren Zeilentransformationen.

Analog: (elementare) Spaltentransformationen

6.19 Def.: Elementarmatrizen

$$E_{k \leftrightarrow l} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & 1 & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ l \end{matrix}$$

Einträge:

$$e_{kl} = e_{lk} = 1$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k, l$$

sonst 0

$$E_{s \cdot k} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & s & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} k \end{matrix}$$

$(s \in K^*)$

$$e_{kk} = s \in K^*$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i \neq k$$

sonst 0

$$E_{k \frac{s}{l}} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} l \end{matrix}$$

$(s \in K, k \neq l)$

$$e_{lk} = s \in K$$

$$e_{ii} = 1 \quad \forall i$$

sonst 0

6.20 Satz: Die elementaren **Zeilentrafos** entsprechen **Links**multiplikation mit den Elementarmatrizen:

$E_{k \leftrightarrow l}$: A geht aus A durch Vertauschen der Zeilen k & l hervor.

$E_{s,k}$: A geht aus A durch Skalieren von Zeile k mit dem Faktor s hervor.

$E_{\begin{smallmatrix} ks \\ l \end{smallmatrix}}$: A geht aus A durch Addieren des s -fachen von Zeile k auf Zeile l hervor.

Die elementaren **Spaltentrafos** entsprechen **Rechts**multiplikation mit den Elementarmatrizen.

$E_{k \leftrightarrow l}$: A geht aus A durch Vertauschen der Spalten k & l hervor.

$E_{s,k}$: A geht aus A durch Skalieren von Spalte k mit dem Faktor s hervor.

$E_{\begin{smallmatrix} k \\ ls \end{smallmatrix}}$: A geht aus A durch Addieren des s -fachen von Spalte l auf Spalte k hervor.

Beweis: Für beliebige $A = (a_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_K(l \times m)$,
 $B = (b_{jk})_{jk} \in \text{Mat}_K(m \times n)$

ist nach Def. $(A \cdot B)_{i,k} = \sum_j a_{ij} \cdot b_{jk}$,

also $(\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot B)_k = \sum_j a_{ij} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } B)_k$

also schlicht: $(\text{Zeile } i \text{ von } A \cdot B) = \sum_j a_{ij} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } B)$

Analog gilt: $(\text{Spalte } k \text{ von } A \cdot B) = \sum_j (\text{Spalte } j \text{ von } A) \cdot b_{jk}$

Rechne nun durch, z.B.:

$$(\text{Zeile } l \text{ von } E_{k \begin{smallmatrix} s \\ l \end{smallmatrix}} \cdot A) = \sum_j e_{lj} \cdot (\text{Zeile } j \text{ von } A)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{j=k} s \cdot (\text{Zeile } k \text{ von } A) \\ \xrightarrow{j=l} + 1 \cdot (\text{Zeile } l \text{ von } A) \end{array}$$

usw. usf.

□

Korollar 6.21: Die Elementarmatrizen sind invertierbar:

$$(E_{k \leftrightarrow l})^{-1} = E_{k \leftrightarrow l}$$

$$(E_{s,k})^{-1} = E_{s^{-1},k}$$

$$(E_{k \begin{smallmatrix} s \\ l \end{smallmatrix}})^{-1} = E_{k \begin{smallmatrix} -s \\ l \end{smallmatrix}}$$

Beweis:

$$E_{k \leftrightarrow l} \cdot E_{k \leftrightarrow l} = E_{k \leftrightarrow l} (E_{k \leftrightarrow l} \cdot 1_n) \stackrel{6.20}{=} 1_n$$

usw.

□

Korollar 6.22: Zeilen- und Spaltenoperationen ändern nicht den Rang einer Matrix.

Beweis: Nach Satz 6.20 reicht es z.z.:

ist A beliebige Matrix, und sind E_1 und E_2 invertierbare Matrizen, so ist

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(E_1 \cdot A \cdot E_2).$$

In lineare Abb. übersetzt heißt das:

$$\text{rk}(f) = \text{rk}(i_1 \circ f \circ i_2)$$

für beliebige lineare Abb. f und Isomorphismen i_1 und i_2 .

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \xrightarrow[\cong]{i_1} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow[\cong]{i_2} & W' \\ & & & & \text{im}(f) & \xrightarrow[\cong]{\text{im}(i_2 \circ f)} & \text{im}(i_2 \circ f \circ i_1) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \text{im}(f \circ i_1) & & \text{im}(i_2 \circ f \circ i_1) \end{array}$$

Es ist $\text{rk}(f) = \text{rk}(f \circ i_1)$, denn

$$\text{im}(f) = \text{im}(f \circ i_1).$$

Es ist $\text{rk}(f \circ i_1) = \text{rk}(i_2 \circ f \circ i_1)$, denn der

Isomorphismus i_2 lässt sich einschränken zu einem

Isomorphismus $\text{im}(f \circ i_1) \xrightarrow{\cong} \text{im}(i_2 \circ f \circ i_1)$. [...] $\square$

6.23 Def.: Für ein LGS $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ nennen wir
 $(A | \underline{b})$
die zugehörige erweiterte Matrix.

6.24 Korollar:

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich durch
Zeilentransformation nicht:

geht $(A' | \underline{b}')$ aus $(A | \underline{b})$ durch eine Zeilen-
trafo hervor, so ist

$$\mathcal{L}(A', \underline{b}') = \mathcal{L}(A, \underline{b})$$

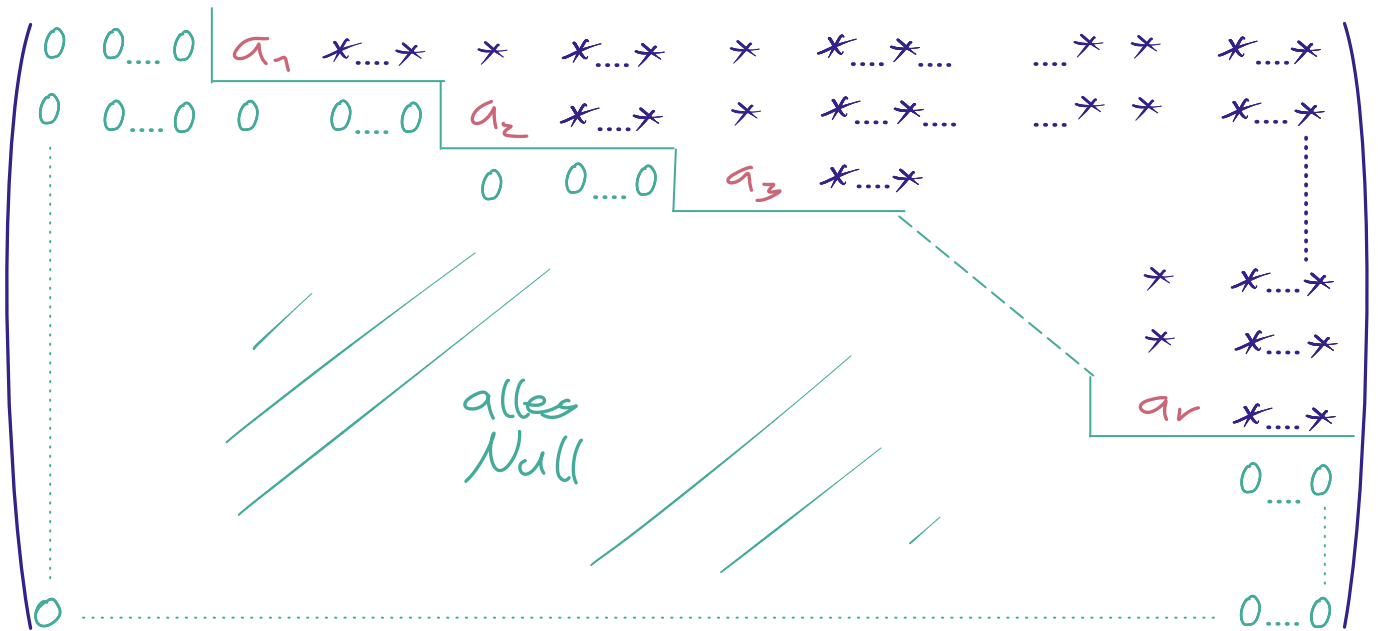
Beweis: Nach Satz 6.20 ist $(A' | \underline{b}') = E \cdot (A | \underline{b})$
für ein Produkt E von Elementarmatrizen. Nach
Korollar 6.21 ist E invertierbar. Also gilt:

$$A' \cdot \underline{x} = \underline{b}' \Leftrightarrow E \cdot A \cdot \underline{x} = E \cdot \underline{b} \Leftrightarrow A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$\Leftarrow E$
 $\Rightarrow E^{-1}$

□

6.25 Def.: Matrix in Zeilenstufenform (ZSF):

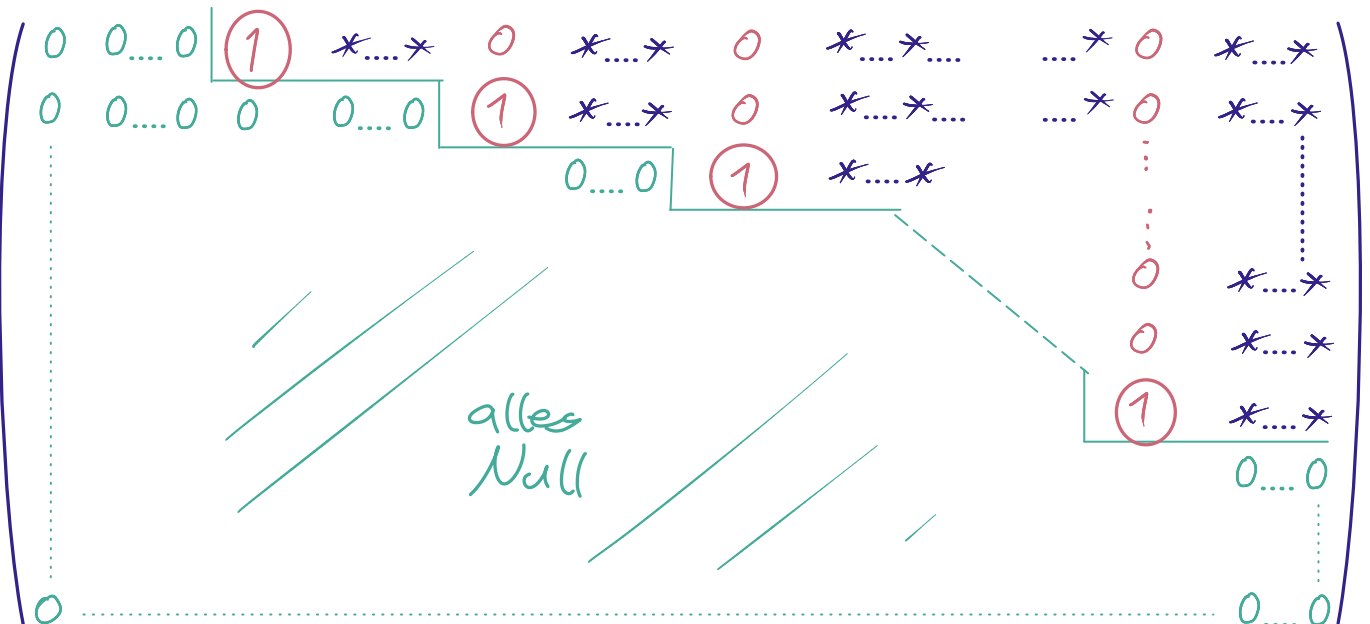


$$a_i \neq 0$$

„Die Anzahl der führenden Nullen steigt von Zeile zu Zeile (sodange sie steigen kann).“

Die Einträge a_i heißen Pivot-Elemente.

Matrix in Zeilennormalform (ZNF):



Zeilenstufenform + Pivot-Elemente = 1
+ Nullen über Pivots

Spaltenstufenform / -normalform analog

Matrix in Normalform:

