

Basen

K Körper

$V = (V, +, \cdot)$ K -VR

5.1 Def.: Ein Tupel $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren $\underline{v}_i \in V$ ist ...

(a) ... Erzeugendensystem von V , falls

$$\langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \} \rangle = V.$$

(b) ... linear unabhängig, wenn sich die Vektoren $\underline{v}_i$ nur auf triviale Weise zum Nullvektor linear kombinieren lassen, wenn also für Skalare $s_i \in K$ gilt:

$$\sum_{i \in I} s_i \underline{v}_i = \underline{0} \Rightarrow \left(\forall i \in I: s_i = 0 \right)$$

endlich (d.h.: $s_i = 0$ für alle außer endlich viele i)

(c) Eine **Basis** von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V .

Beispiele:

(a) $V = K^d$. Sei $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\underline{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d)$ ist ein Erzeugendensystem von K^d :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + x_d \cdot \underline{e}_d \\ &\in \langle \{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_d \} \rangle \end{aligned}$$

$(e_1, \dots, e_d)$ ist linear unabhängig:

Seien $s_1, \dots, s_d \in K$, und sei

$$\sum_{i=1}^d s_i \cdot e_i = \underline{0}.$$

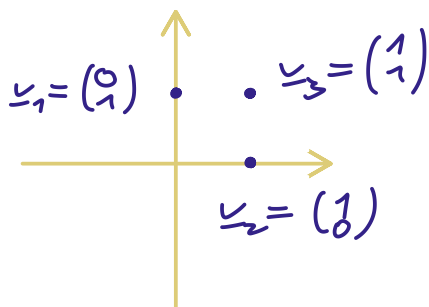
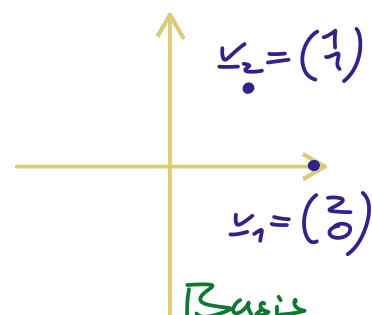
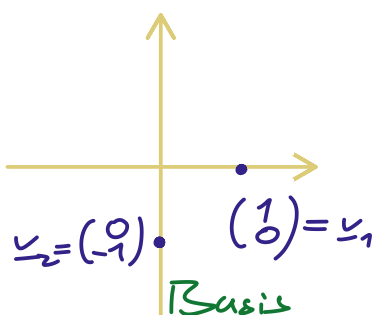
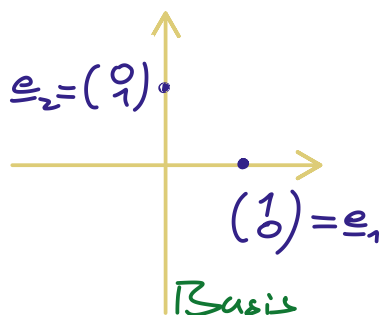
$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

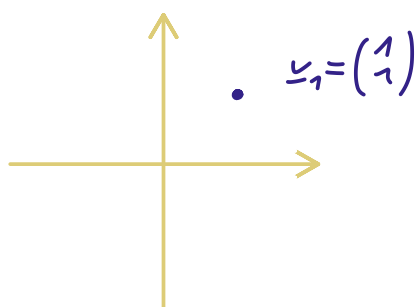
Dann ist $s_1 = s_2 = \dots = s_d = 0$.

Also ist $(e_1, \dots, e_d)$ eine Basis, die Standardbasis von K^d .

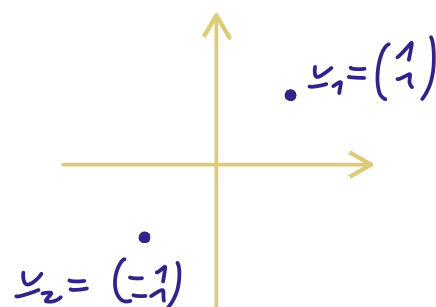
(b) $V = \mathbb{R}^2$



E-System
(linear abhängig:
 $v_3 - v_1 - v_2 = \underline{0}$)



kein E-System
(linear unabhängig)



kein E-System
(linear abhängig:
 $v_1 + v_2 = \underline{0}$)

(c) $(\underline{0})$ ist immer linear abhängig ($1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$)

$(\underline{v})$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist immer linear unabhängig

$$(s \cdot \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow (s = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}))_{4.2}$$

(d) $V = \mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{R}$ -VR)

$(1, x, x^2, x^3, \dots) = (x^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist...

... ein Erzeugendensystem, denn jedes Polynom

hat die Form $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} s_i x^i$
endlich

für gewisse $s_i \in \mathbb{R}$.

... linear unabhängig, denn ein Polynom ist genau

dann Null, wenn alle Koeffizienten Null sind.

Also ist $(x^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]$.

Warnung 5.2.:

Ob $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem ist, hängt
nur von der Menge $\{\underline{v}_i \mid i \in I\}$ ab.

Ob $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist, hängt ab
vom Tupel.

z.B. für $\underline{v} \neq \underline{0}$: $(\underline{v})$ linear unabh.

$(\underline{v}, \underline{v})$ linear abhängig.

5.3 Satz: Ein Tupel $(v_i)_{i \in I}$ ist ...

(a) ... ein Erzeugendensystem von V

$\Leftrightarrow$ jedes $v \in V$ hat mindestens eine Darstellung der Form $v = \sum_{i \in I, \text{ endlich}} s_i \cdot v_i$ mit $s_i \in K$.

(b) ... linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ jedes $v \in V$ hat höchstens eine Darstellung der Form $v = \sum_{i \in I, \text{ endlich}} s_i \cdot v_i$ mit $s_i \in K$.

(c) ... eine Basis von V

$\Leftrightarrow$ jedes $v \in V$ hat genau eine Darstellung der Form $v = \sum_{i \in I, \text{ endlich}} s_i \cdot v_i$ mit $s_i \in K$.

Beweis:

a: Def. von linearer Hülle.

b: ($\Leftarrow$) Sei $0 = \sum_{i \in I} s_i \cdot v_i$ für gewisse $s_i \in K$.

zz: $s_i = 0 \quad \forall i \in I$.

Natürlich gilt auch

$$0 = \sum_{i \in I} 0 \cdot v_i$$

Da laut Annahme höchstens eine solche Darstellung von 0 existiert, folgt: $s_i = 0 \quad \forall i \in I$.

($\Rightarrow$) Sei $\underline{v} \in V$ beliebig, und sei
 $\underline{v} = \sum_{i \in I} s_i \underline{v}_i \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in I} t_i \underline{v}_i$
 für gewisse $s_i, t_i \in K$.

z.z.: $s_i = t_i \quad \forall i \in I$.

Aus $(*)$ erhalten wir

$$\sum_{i \in I} (s_i - t_i) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

Da $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabh., folgt:

$$s_i - t_i = 0 \quad \forall i \in I,$$

$$\text{also} \quad s_i = t_i \quad \forall i \in I.$$

c: folgt aus a & b

□

5.4 Korollar:

$(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ist genau dann eine Basis von V ,
 wenn die lineare Abb.

$$\begin{array}{ccc} V & \longleftarrow & \bigoplus_I K \\ \sum_{i \in I} s_i \underline{v}_i & \longleftarrow & (s_i)_{i \in I} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{endliche} & & \text{nur endlich} \\ \text{Summe} & & \text{viele } s_i \neq 0 \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Insbesondere gilt:

$$V \cong K^n$$

falls V eine endliche Basis mit n Elementen besitzt.

Beweis:

Die Abb. ist stets K -linear. Nach Satz 5.3(c)
 ist sie genau dann bijektiv, wenn $(\underline{v}_i)_{i \in I}$
 eine Basis ist. □

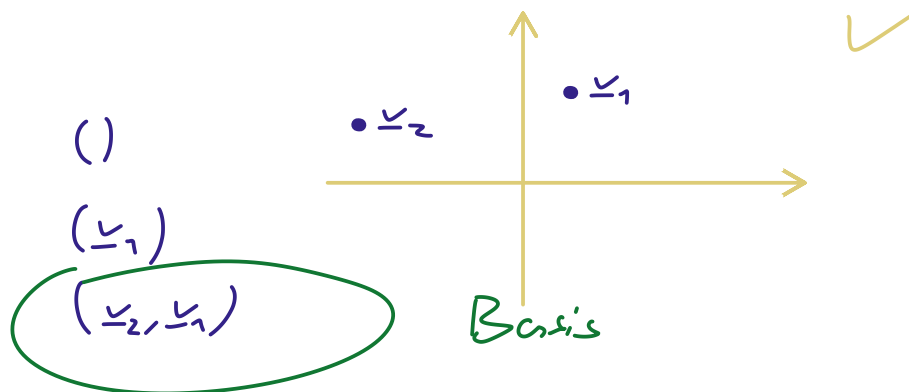
5.5 Ergänzungslemma:

Sei $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Für jedes $\underline{v} \in V \setminus \langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle$ ist auch das um $\underline{v}$ ergänzte Tupel

$(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Beispiel:



Beweis:

Seien $(\underline{v}_i)_{i \in I}$, $\underline{v}$ wie angegeben.

$$\text{Sei } s \cdot \underline{v} + \sum_{i \in I} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0}. \quad (*)$$

z.z.: $s = 0$ und $s_i = 0 \ \forall i$.

Falls $s \neq 0$, multipliziere $(*)$ mit s^{-1} :

$$\underline{v} + \sum_{i \in I} (s^{-1} s_i) \cdot \underline{v}_i = \underline{0},$$

$$\text{also } \underline{v} = \sum_{i \in I} (-s^{-1} s_i) \cdot \underline{v}_i \in \langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle.$$

Also muss gelten: $s = 0$. Dann hat $(*)$ die Form

$$\sum_{i \in I} s_i \cdot \underline{v}_i = \underline{0},$$

und aus der linearen Unabh. der $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ folgt: $s_i = 0 \ \forall i \in I$. $\square$

Satz 5.6 (Charakterisierung von Basen)

(a) Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem:

$$(\underline{v}_i)_{i \in I} \text{ ist Basis von } V \iff \begin{cases} \langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle = V \\ \text{und} \\ \langle \{\underline{v}_i \mid i \in J\} \rangle \neq V \\ \text{für jedes } J \subsetneq I \end{cases}$$

(b) Eine Basis ist ein maximales linear unabhängiges Tupel:

$$(\underline{v}_i)_{i \in I} \text{ ist Basis von } V \iff \begin{cases} (\underline{v}_i)_{i \in I} \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{und} \\ (\underline{v}, \underline{v}_i)_{i \in I} \text{ ist linear abhängig} \\ \text{für jedes } \underline{v} \in V. \end{cases}$$

Beweis:

b: ($\Leftarrow$) zz: $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem

Angenommen nicht. Dann ist $\langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle \neq V$, also existiert ein $\underline{v} \in V \setminus \langle \{\underline{v}_i \mid i \in I\} \rangle$.

Nach Ergänzungslemma 5.5 ist dann

$(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i \in I}$ linear unabhängig 

($\Rightarrow$) Sei $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

• $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ ist linear unabh. ✓

• Sei $\underline{v} \in V$ beliebig.

zz: $(\underline{v}, \underline{v}_i)_{i \in I}$ ist linear abhängig.

Da $(v_i)_{i \in I}$ Erzeugendensystem ist, können wir v ausdrücken als

$$v = \sum_{i \in I} s_i \cdot v_i$$

für gewisse $s_i \in K$. Also ist

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \neq 0}}{1} \cdot v + \sum_{i \in I} (-s_i) \cdot v_i = \underline{0}.$$

a: ($\Rightarrow$) Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V .

- $\langle \{v_i \mid i \in I\} \rangle = V$ ✓

- Sei $J \subsetneq I$.

zz.: $\langle \{v_i \mid i \in J\} \rangle \neq V$.

Angenommen,

$$\langle \{v_j \mid j \in J\} \rangle = V. \quad (*)$$

Da $J \neq I$, ex. ein $i \in I \setminus J$.

Da $v_i \in V$, folgt aus $(*)$:

$$v_i = \sum_{j \in J} s_j v_j \quad \text{für gewisse } s_j \in K.$$

Also ist

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \neq 0}}{1} \cdot v_i + \sum_{j \in J} (-s_j) \cdot v_j = \underline{0},$$

im Widerspruch zur linearen Unabh.
von $(v_i)_{i \in I}$. $\downarrow$

($\Leftarrow$) zz.: $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Sei also $\sum_{i \in I} s_i \cdot v_i = \underline{0}$ für gewisse $s_i \in K$.

Angenommen, $s_k \neq 0$ für ein $k \in I$.

Multipliziere mit s_k^{-1} :

$$v_k + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (s_k^{-1} s_i) \cdot v_i = \underline{0}.$$

Es ist also

$$\underline{v}_k = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (-\bar{s}_k^{-1} \cdot s_i) \cdot \underline{v}_i \quad (*)$$

Hieraus folgt:

$$\langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \} \rangle = \langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \setminus \{k\} \} \rangle$$

((2) —

($\subseteq$) Eine beliebige Linearkombination aus $\langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \} \rangle$ können wir schreiben als

$$\sum_{i \in I} t_i \cdot \underline{v}_i = t_k \cdot \underline{v}_k + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} t_i \cdot \underline{v}_i$$

$$\stackrel{(*)}{=} t_k \left(\sum_{i \in I \setminus \{k\}} -\bar{s}_k^{-1} \cdot s_i \cdot \underline{v}_i \right) + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} t_i \cdot \underline{v}_i$$

$$= \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (-t_k \bar{s}_k^{-1} \cdot s_i + t_i) \cdot \underline{v}_i$$

$$\in \langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \setminus \{k\} \} \rangle$$

Aber nach Annahme

$$V = \langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \} \rangle \neq \langle \{ \underline{v}_i \mid i \in I \setminus \{k\} \} \rangle \quad \text{⚡}$$

Also müssen alle Koeffizienten s_k Null sein.

□

S.7 Basisauswahl- und Ergänzungssatz

K Körper, V K -VR

$E := (\underline{v}_i)_{i \in E}$ Erzeugendensystem, darin

$U := (\underline{v}_i)_{i \in U}$ linear unabhängig (also $U \subseteq E$).

Dann können wir Vektoren aus E auswählen, die U zu einer Basis von V ergänzen.

Insbesondere:

(a) Jedes linear unabhängige Tupel lässt sich zu einer Basis von V ergänzen

(Wähle beliebiges E -System E' , und wähle

$E := \left(E' \text{ ergänzt um das gegebene linear unabhängige Tupel.} \right)$

Oder wähle $E := (\underline{v})_{\underline{v} \in V}$.)

(b) Aus jedem Erzeugendensystem lässt sich eine Basis auswählen.

(Wähle $U = \emptyset$)

(c) Hauptsatz der linearen Algebra (Teil 1):
Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(Wähle $U = \emptyset$, E beliebiges E -System.)

Wir werden diesen Satz nur im endlich erzeugten Fall beweisen, also unter der Annahme, dass V ein endliches E -System besitzt. Allgemeiner Fall benötigt etwas mehr Mengentheorie, als bisher eingeführt.

Beweis zu 5.7:

Konstruiere schrittweise

$$U = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subseteq E$$

mit $(v_i)_{i \in B_k}$ linear unabhängig. ↑ endlich

SCHRITT 0: $B_0 := \emptyset$.

SCHRITT $k+1$: Sei B_k bereits konstruiert.

Falls alle Erzeuger v_j ($j \in E$) bereits in

$\{v_i\}_{i \in B_k}$ enthalten sind, folgt

$\checkmark = \{v_j\}_{j \in E} \subseteq \{v_i\}_{i \in B_k}$. In diesem Fall ist also $(v_i)_{i \in B_k}$ bereits ein E -System von V und somit eine Basis von V . FERTIG

Falls nicht, $\exists v_j$ ($j \in E$) sodass $v_j \in V \setminus \langle v_i \rangle_{i \in B_k}$ offenbar $j \in E \setminus B_k$.

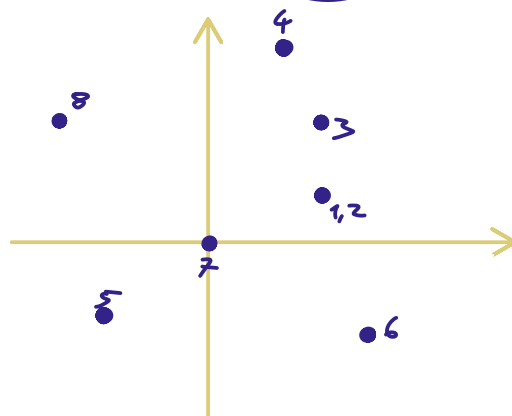
Nach Ergänzungslemma ist dann $(v_j, v_i)_{i \in B_k}$ linear unabhängig. Wähle also $B_{k+1} := \{j\} \cup B_k$

□

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$

$$U = ()$$

$$U = \emptyset \subsetneq \{4\} \subsetneq \{2, 4\} \subseteq E = \{1, 2, \dots, 8\}$$



S.8 Dimensionssatz:

Je zwei Basen $(v_i)_{i \in B}$, $(w_i)_{i \in B'}$ eines VRs haben dieselbe Länge (d.h. $|B| = |B'|$).

Auch diesen Satz werden wir nur im endlich-erzeugten Fall beweisen.

S.9 Def.: Ein VR ist endlich erzeugt / endlich-dimensional, wenn er ein endliches Erzeugendensystem / eine endliche Basis besitzt.

(Hauptsatz S.7 zeigt: diese beiden Bedingungen sind äquivalent.)

S.10 Def.: Die Dimension $\dim_K V$ eines K -VRs V ist die Länge einer (K) -Basis $(v_i)_{i \in B}$ (also die Kardinalität von B).

(Satz S.8 zeigt: das ist wohldefiniert)

Beispiel: $\dim_K(K^d) = d$ (benutze Standardbasis)
 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$.
($\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ unendlich)

S. 11 Steinitz'sches Austauschlemma

V K -VR, $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ Basis von V ,
 $\underline{u} = s_1 \underline{b}_1 + \dots + s_d \underline{b}_d \in V$ ($s_i \in K$).

Ist $s_k \neq 0$ (für ein $k \in \{1, \dots, d\}$),

so ist auch $\mathcal{B}' = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{k-1}, \underline{u}, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_d)$
eine Basis von V .
K-ter Eintrag

Beispiel:

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ sind auch Basen von $\mathbb{R}^2$

$$\underline{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist keine Basis von $\mathbb{R}^2$

Beweis:

$\mathcal{B}'$ Erzeugendensystem:

Löse Def. von $\underline{u}$ nach $\underline{b}_k$ auf:

$$\underline{b}_k = \bar{s}_k^{-1} \cdot \underline{u} + (-\bar{s}_k^{-1} s_1) \underline{b}_1 + \dots + (-\bar{s}_k^{-1} s_{k-1}) \cdot \underline{b}_{k-1} \\ + (-\bar{s}_k^{-1} s_{k+1}) \underline{b}_{k+1} + \dots + (-\bar{s}_k^{-1} s_d) \cdot \underline{b}_d$$

Das zeigt:

$$\underline{b}_k \in \langle \mathcal{B}' \rangle$$

Außerdem (offensichtlich)

$$\underline{b}_i \in \langle \mathcal{B}' \rangle \quad \text{für alle } i \neq k.$$

Also

$$\checkmark \quad \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B}' \rangle, \quad \text{also} \quad V = \langle \mathcal{B}' \rangle.$$

$\mathcal{B}'$ linear unabhängig:

$$\text{Sei } \sum_{i, i \neq k} t_i \cdot \underline{b}_i + t \cdot \underline{u} = \underline{0} \quad \text{für gewisse } t, t_i \in K.$$

Setze Def. von $\underline{u}$ ein:

$$\sum_{i, i \neq k} (t_i + t \cdot s_i) \underline{b}_i + t \cdot s_k \underline{b}_k = \underline{0}$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig, folgt:

$$\underbrace{t_i + t \cdot s_i = 0}_{(2)} \quad \forall i \neq k \quad \text{und} \quad \underbrace{t \cdot s_k = 0}_{(1)}.$$

Da $s_k \neq 0$, folgt aus (1): $t = 0$.

Damit folgt aus (2): $t_i = 0 \quad \forall i \neq k.$

□

5.12 Austauschatz

V K -VR, $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ Basis von V

$\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell)$ linear unabh. in V .

Dann ist $\ell \leq d$ und es gibt

$\underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_\ell}$ in $\mathcal{B}$

derart, dass wir durch Austausch von

$\underline{b}_{i_j}$ gegen $\underline{u}_j$ für alle $j \in \{1, \dots, \ell\}$

eine neue Basis von V erhalten.

Beweis: per Induktion über ℓ

IA: $\ell = 0$. ✓

IS: IV: Satz gilt, falls $\mathcal{U}$ Länge ℓ hat.

Sei nun $\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell, \underline{u}_{\ell+1})$ linear unabh.

Dann ist insbesondere $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell)$ linear unabh.

und wir können IV anwenden.

Nach Umnummerierung der Vektoren in $\mathcal{B}$

erhalten wir so neue Basis

$$\mathcal{B}_\ell = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell, \underline{b}_{\ell+1}, \dots, \underline{b}_d).$$

zz.: $d \geq \ell+1$, und wir können einen der

Vektoren $\underline{b}_{\ell+1}, \dots, \underline{b}_d$ durch $\underline{u}_{\ell+1}$ ersetzen.

Da $\mathcal{B}_\ell$ insbes. ein E-System ist, können wir

$\underline{u}_{\ell+1}$ schreiben als

$$\underline{u}_{\ell+1} = \sum_{i=1}^{\ell} s_i \cdot \underline{u}_i + \sum_{i=\ell+1}^d s_i \cdot \underline{b}_i$$

Da $\mathcal{U}$ linear unabhängig ist, $\exists k \in \{\ell+1, \dots, d\}$ mit

$s_k \neq 0$. Insbesondere ist also $d \geq \ell+1$, und gemäß

Austauschlemma 5.11 können wir $\underline{b}_k$ durch $\underline{u}_{\ell+1}$

ersetzen. □

Beweis des Dimensionssatzes 5.8

(für endlich-erzeugte VR):

Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ eine endliche Basis von V .

Sei $\mathcal{B}'$ eine beliebige weitere Basis von V .

zz: $\mathcal{B}'$ ist auch endlich, von Länge d .

Dazu wenden wir Austauschatz 5.12 an auf:

(a) Basis $\mathcal{B}'$
 $\mathcal{U} := \mathcal{B}$ } $\mathcal{B}'$ hat mindestens Länge d .

(b) Basis $\mathcal{B}$
 $\mathcal{U} := (u_1, \dots, u_l)$
Tupel aus beliebig
endlich vielen
Vektoren aus $\mathcal{B}'$ } $l \leq d$

Also hat $\mathcal{B}'$ höchstens Länge d .

(a) & (b) zusammen zeigen: $\mathcal{B}'$ hat Länge d . $\square$

S. 13 Satz (Basiskriterium)

V endlich-dim. VR

Für ein Tupel $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ von Vektoren aus V sind äquivalent:

(a) $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V .

(b) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig und $d = \dim V$.

(c) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem
und $d = \dim V$.

Beweis:

(a $\Rightarrow$ b) und (a $\Rightarrow$ c) klar

(a $\Leftarrow$ b) Nach Basisergänzungssatz 5.7 können wir $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{B}'$ ergänzen.

Länge von $\mathcal{B}'$ ist $\dim V$.

Länge von $\mathcal{B}$ ist d .

Aus $d = \dim V$ folgt also: $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

(a $\Leftarrow$ c) Nach Basiswahlssatz 5.7 können wir aus $\mathcal{B}$ eine Basis $\mathcal{B}'$ auswählen.

Länge von $\mathcal{B}'$ ist $\dim V$.

Länge von $\mathcal{B}$ ist d .

Aus $d = \dim V$ folgt also: $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

□

S. 14 Dimensionsformeln

V, V_1, V_2 endlich-erzeugte VR

U, U_1, U_2 UVR von V

(a) $\dim U \leq \dim V$, und
 $\dim U = \dim V \iff U = V$
(Insbesondere ist auch U endlich erzeugt.)

(b) $\dim\left(\frac{V}{U}\right) = \dim V - \dim U$

(c) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

(d) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

S. 15 Lemma:

Ist $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell)$ linear unabhängig,
so ist

$$\langle \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\} \rangle \cap \langle \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\} \rangle = \{\underline{0}\}$$

Beweis:

Sei $\underline{v} \in \langle \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\} \rangle \cap \langle \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\} \rangle$. Dann ist

$$\underline{v} = \sum_i r_i \cdot \underline{a}_i = \sum_j s_j \cdot \underline{b}_j \quad \text{für gewisse } r_i, s_j \in K.$$

$$\text{Also ist } \sum_i r_i \cdot \underline{a}_i + \sum_j (-s_j) \cdot \underline{b}_j = \underline{0}.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit folgt:

$$r_i = 0 \quad \forall i, \quad s_j = 0 \quad \forall j. \quad \text{Also } \underline{v} = \underline{0}.$$

□

Beweis zu S. 14.

a: Wähle Basis $\mathcal{B}$ von U .

Ergänze $\mathcal{B}$ zu Basis $\mathcal{B}'$ von V .

Das zeigt bereits: $\dim U \leq \dim V$.

$(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ Ist $\dim U = \dim V$, so haben $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ dieselbe Länge. Also ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, und es folgt $U = \langle \mathcal{B}' \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle = V$.

b: Wähle Basis $\mathcal{B}_U = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d)$ von U .

Ergänze $\mathcal{B}_U$ zu Basis

$\mathcal{B}_V = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ von V .

Beh.: $([\underline{e}_1], \dots, [\underline{e}_k])$ ist Basis von $\frac{V}{U}$

Bew.:

E-System: Jeder Vektor aus $\frac{V}{U}$ lässt sich schreiben als $[\underline{v}]$ für ein $\underline{v} \in V$.

Nun lässt sich $\underline{v}$ schreiben als

$$\underline{v} = \sum_i r_i \underline{b}_i + \sum_j s_j \underline{e}_j$$

für gewisse $r_i, s_j \in K$. Also ist

$$[\underline{v}] = \left[\sum_i r_i \underline{b}_i + \sum_j s_j \underline{e}_j \right]$$

$$= \sum_i r_i [\underline{b}_i] + \sum_j s_j [\underline{e}_j]$$

$$= [\underline{0}] \text{ da } \underline{b}_i \in U$$

$$= \sum_j s_j [\underline{e}_j]$$

(linear unabh.: Sei $\underbrace{\sum s_j [e_j]}_{[\sum s_j e_j]} = [0]$ in $\frac{V}{U}$.

Dann ist $\sum s_j e_j \in U$.

Also ist $\sum s_j e_j \in \underbrace{(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_d) \cap (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)}_{\{0\} \text{ nach S. 15}}$

also $\sum s_j e_j = 0,$

also $s_j = 0 \quad \forall j$, da $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$ l.u. $\triangle$