

Konstruktionen mit abstrakten VR

4.18 $(V_1, +, \cdot), (V_2, +, \cdot)$ K -VR

Def.: Das Produkt / die Summe von $(V_1, +, \cdot)$ und $(V_2, +, \cdot)$ ist die Menge $V_1 \times V_2$ mit komponentenweiser Addition & Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} (\underline{v}_1, \underline{v}_2) + (\underline{v}'_1, \underline{v}'_2) &:= (\underline{v}_1 + \underline{v}'_1, \underline{v}_2 + \underline{v}'_2) \\ s \cdot (\underline{v}_1, \underline{v}_2) &:= (s \cdot \underline{v}_1, s \cdot \underline{v}_2) \end{aligned}$$

Annotations: A green arrow labeled "neu" points from $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ to the first equation. Green arrows labeled "in V_1 " and "in V_2 " point from $\underline{v}_1 + \underline{v}'_1$ and $\underline{v}_2 + \underline{v}'_2$ respectively to the second equation.

für $(\underline{v}_1, \underline{v}_2), (\underline{v}'_1, \underline{v}'_2) \in V_1 \times V_2, s \in K$.

Satz: Das ist ein K -VR, geschrieben als $V_1 \times V_2$ oder $V_1 \oplus V_2$.

Beispiel:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^n$$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$$

4.19 $(V_i, +, \cdot)$ K -VR $(i \in I)$

Def.: Das Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ ist die Menge $\prod_{i \in I} V_i$ mit komponentenweiser Addition & Skalarmultiplikation.

Die Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ist der durch die Teilmenge

$$\left\{ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \mid \begin{array}{l} v_i = \underline{0} \text{ für alle} \\ \text{außer endlich viele} \\ \text{Indizes } i \in I \end{array} \right\}$$

definierte UVR des Produkts.

Satz: Summe & Produkt sind VR.

Notiz: Für endliche Indexmengen gilt offenbar

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} V_i$$

und diese endliche Summe/dieses endliche Produkt stimmen mit vorheriger Konstruktion überein.

Beispiele:

$$(a) \quad \mathbb{R}[X] \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i X^i \mapsto (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$$

$\uparrow$ Das ist eine endliche Summe
 $\uparrow$ $\in \mathbb{R}$

$$(b) \quad \text{Abb}(I, \mathbb{R}) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{R}$$

$\nwarrow$ beliebige Menge

$$\left(\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \longmapsto a_i \end{array} \right) \mapsto (a_i)_{i \in I}$$

$$\left(\begin{array}{c} f: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \longmapsto f(i) \end{array} \right) \mapsto (f(i))_{i \in I}$$

4.20 Notiz:

Die Projektionen

$$\pi_j: \prod_{i \in I} V_i \longrightarrow V_j$$

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow V_j$$

$$(v_i)_{i \in I} \mapsto v_j$$

und die Inklusionen

$$V_j \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i$$

$$V_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$$

$$v \mapsto (v_i)_i \text{ mit } v_i = \begin{cases} v & \text{falls } i=j \\ \underline{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

sind linear.

4.21 Def.: V VR, $U_1, \dots, U_l \subseteq V$ UVR.

V zerfällt in $U_1, \dots, U_l$, falls die Abbildung

$$(*) \quad \bigoplus_{i=1}^l U_i \longrightarrow V$$

$$(u_i)_i \longmapsto \sum_{i=1}^l u_i$$

$(u_1, u_2, \dots, u_l)$ $\uparrow$ Addition von Vektoren in V .

ein VR-Isomorphismus ist.

In diesem Fall schreiben wir kurz:

$$\bigoplus_{i=1}^l U_i = V$$

4.22 Notiz. Die Abb. (*) ist immer linear.

Sie ist genau dann ein Isomorphismus, wenn gilt:

(*) ist surjektiv und injektiv

bzw.:

$$\sum_{i=1}^l U_i = V \quad \text{und} \quad \begin{cases} \text{für } u_1 \in U_1, \dots, u_l \in U_l \text{ gilt:} \\ \sum_{i=1}^l u_i = \underline{0} \\ \Rightarrow (u_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, l) \end{cases}$$

$\uparrow$ interne Summe von UVR

Beispiel:

$\mathbb{R}^2$ zerfällt in x -Achse und y -Achse:

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$$

Quotientenvektorräume

4.23 $(V, +, \cdot)$ K -VR.

Satz: Ist $U \subseteq V$ ein K -UVR, so ist die Quotientengruppe V/U $(= \frac{(V, +)}{(U, +)})$ wieder ein K -VR für die Skalarmult.

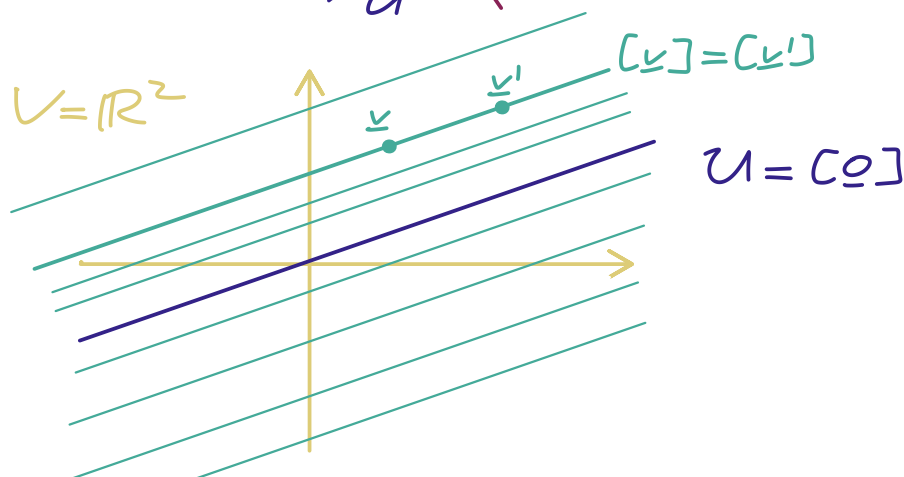
$$s \cdot [v] := [s \cdot v] \quad (s \in K, v \in V)$$

und die kanonische Projektion

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V/U \\ v & \longmapsto & [v] \end{array}$$

ist K -linear.

Def.: Wir nennen V/U Quotientenvektorraum.



V/U besteht aus den Nebenklassen
 $[v] = v + U$
von U .

4.24 Notiz: Für $v, v' \in V$ gilt:

$$[v] = [v'] \text{ in } V/U \Leftrightarrow v - v' \in U$$

(vgl. Def. 2.17 & Satz 2.18)

Beweis zu 4.23:

Skalarmultiplikation wohldef.:

Sei $s \in K$, $[\underline{v}] = [\underline{v}']$.

Dann ist $\underline{v} - \underline{v}' \in \mathcal{U}$ (4.24),

somit $s \cdot (\underline{v} - \underline{v}') \in \mathcal{U}$ (4VR3),

also $s \cdot \underline{v} - s \cdot \underline{v}' \in \mathcal{U}$ (Distrib.),

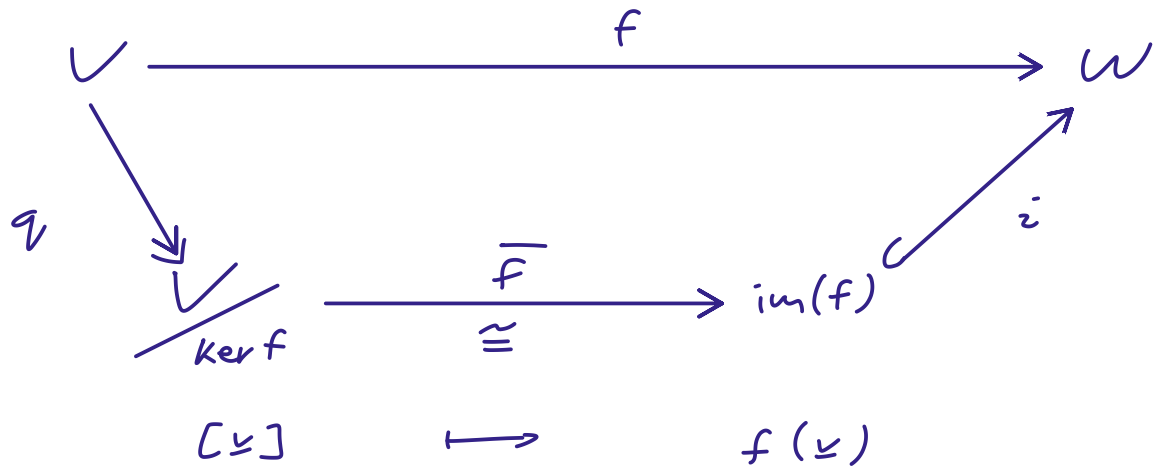
und das bedeutet:

$$[s \cdot \underline{v}] = [s \cdot \underline{v}'].$$

VR-Axiome für $\frac{V}{\mathcal{U}}$ folgen leicht aus denen für V . □

4.25 Isomorphiesatz für VR

Jede lineare Abb. $f: V \rightarrow W$ lässt sich faktorisieren als



wobei q die kanonische Projektion,
 i die kanonische Inklusion ist.

Alle Abbildungen sind linear und $\bar{f}$ ist ein VR-Isomorphismus.

Beweis: Zu prüfen ist nach Satz 2.25 nur noch:

$$\forall s \in K: \bar{f}(s \cdot [v]) = s \cdot \bar{f}([v])$$

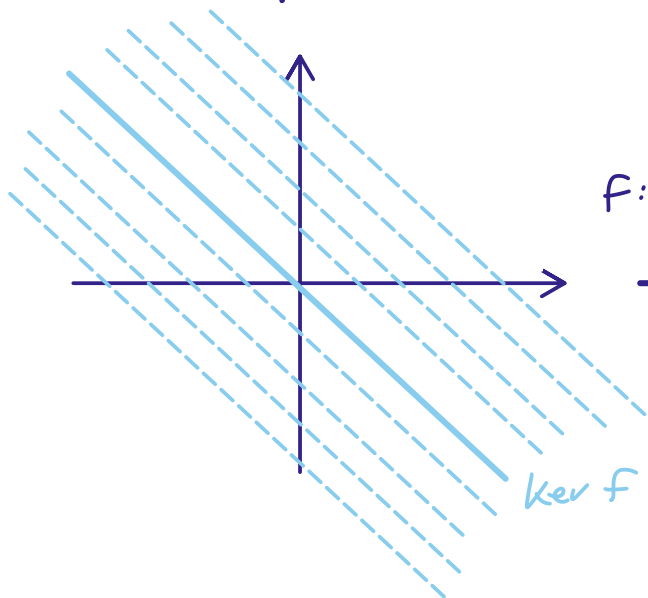
$$\text{Dazu: } \bar{f}(s \cdot [v]) \stackrel{\text{Def. 4.23}}{=} \bar{f}([s \cdot v]) \stackrel{\text{Def. } \bar{f}}{=} f(s \cdot v)$$

$$\stackrel{f \text{ linear}}{=} s \cdot f(v) \stackrel{\text{Def. } \bar{f}}{=} s \cdot \bar{f}([v])$$

□

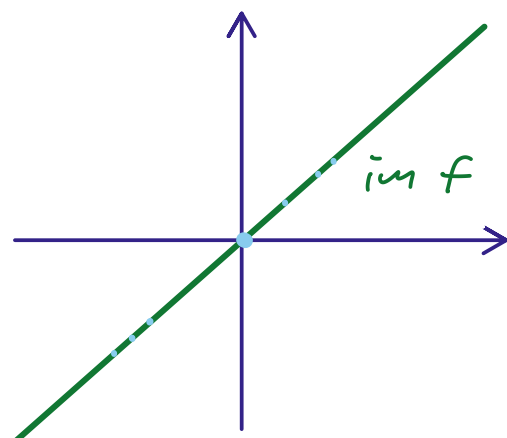
Beispiel:

$V = \mathbb{R}^2$

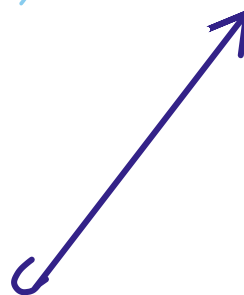
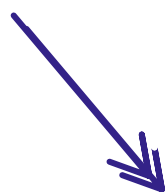


$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$W = \mathbb{R}^2$



$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\mathbb{R}^2 / \ker f \cong \text{im } f$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

(In diesem Beispiel ist $\text{im } f \cong \mathbb{R}$.)
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$