

Lineare Abbildungen

4.12 Def.: V, W K -VR

Eine K -lineare Abb. / K -VR-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus

$$f: (V, +) \longrightarrow (W, +)$$

der zusätzlich $\forall s \in K, v \in V$

$$f(s \cdot v) = s \cdot f(v)$$

erfüllt.

$\uparrow$ in V $\uparrow$ in W

Beispiele:

(a)
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & W \\ v & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{ist } K\text{-linear}$$

(b) $U \subseteq V$ U VR, so ist die Inklusion

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & V \\ u & \mapsto & u \end{array} \quad \text{ist } K\text{-linear.}$$

(c) Die Projektionen $\pi_i: K^n \longrightarrow K$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$$

sind K -linear.

$$s \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 \\ \vdots \\ sx_n \end{pmatrix} \mapsto s \cdot x_i$$

(d)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3 \cdot x \end{array} \quad K\text{-linear}$$

(e)
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3 \cdot x + 1 \end{array} \quad \text{nicht } K\text{-linear}$$

(z.B. $f(0) = 1 \neq 0$)

4.13 Notiz:

(a) $\text{id}: V \longrightarrow V$ ist K -linear.

(b) Die Komposition zweier K -linearer Abb. ist K -linear.

4.14 Def.: Ein Vektorraumisomorphismus ist eine K -lineare Abb. $f: V \longrightarrow W$, für die eine K -lineare Abb. $V \longleftarrow W: g$ existiert, sodass gilt

$$f \circ g = \text{id}_W \quad \text{und} \quad g \circ f = \text{id}_V$$

4.15 Sei $f: V \longrightarrow W$ K -linear.

Satz: f VR-Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv

Beweis:

($\Rightarrow$) f ist insbesondere Iso von Mengen, also bijektiv nach Satz 1.23.

($\Leftarrow$) Satz 1.23: $\exists$ Umkehrabb. g .

Satz 2.14: g Gruppenhomomorphismus.

$$\text{u.z.z. } g(s \cdot \underline{w}) = s \cdot g(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in W, s \in K.$$

Dazu:

$$\begin{aligned} g(s \cdot \underline{w}) &= g(s \cdot f(g(\underline{w}))) && \text{f} \circ \text{g} = \text{id}_W \\ &= g(f(s \cdot g(\underline{w}))) && \\ &= s \cdot g(\underline{w}) && \text{f K-linear} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= s \cdot g(\underline{w}) && \text{g} \circ \text{f} = \text{id}_V \end{aligned}$$

□

4.16 Satz: $f: V \longrightarrow W$ K -linear

Der Kern $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\underline{0}) \subseteq V$

und das Bild $\text{im}(f) = f(V) \subseteq W$

sind UVR.

Beweis: vgl. Satz 2.15; z.B. Bild:

(UVR1) $\underline{0}_W \in \text{im}(f)$, denn $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

(UVR2) Seien $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \text{im}(f)$.

Dann ist $\underline{u}_1 = f(\underline{v}_1)$,

$$\underline{u}_2 = f(\underline{v}_2)$$

für gewisse $\underline{v}_i \in V$. Somit ist

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$$

$$= f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in \text{im}(f)$$

f Gruppen-
homo



(UVR3) Sei $\underline{u} \in \text{im}(f)$, $s \in K$.

Dann ist $\underline{u} = f(\underline{v})$ für ein $\underline{v} \in V$.

Somit

$$s \cdot \underline{u} = s \cdot f(\underline{v})$$

$$= f(s \cdot \underline{v}) \in \text{im}(f).$$

f K -linear



□

4.17 Satz (Injektivitätskriterium)

Eine K -lineare Abb. ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern $\{\underline{0}\}$ ist.

(Spezialfall von Injektivitätskriterium Z. 16)