

Vektorräume

K Körper

z.B. $K = \mathbb{R}$

4.1 Def.: Ein Vektorraum über K / K -Vektorr.

$(V, +, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$

zusammen mit einer Abbildung

$$\circ: K \times V \longrightarrow V$$

sodass $\forall r, s \in K$ und $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ gilt:

$$(V1) \quad r \circ (\underline{u} + \underline{v}) = r \circ \underline{u} + r \circ \underline{v}$$

$$(V2) \quad (r + s) \circ \underline{u} = r \circ \underline{u} + s \circ \underline{u}$$

$$(V3) \quad (r \cdot s) \circ \underline{u} = r \circ (s \circ \underline{u})$$

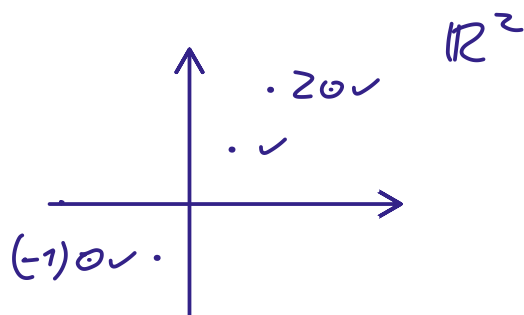
$$(V4) \quad 1 \circ \underline{u} = \underline{u}$$

Elemente von V : Vektoren $\underline{v}$ (oder $\vec{v}$ oder v)

Nullelement von V : Nullvektor $\underline{0}$

Elemente von K : Skalare s

$\circ$ Skalarmultiplikation



Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^d = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^d$ mit Koordinatenveilen + $\odot$.
Wir schreiben Vektoren $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$
gewöhnlich als Spalten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$.

In dieser Notation ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}$$

$$s \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ s \cdot x_2 \\ \vdots \\ s \cdot x_d \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R}.$$

Genauso: K^d ein K -VR für jeden Körper K

(b) Der Polynomring $K[x]$ ist ein K -VR
bezüglich Polynomaddition und der
Skalarmultiplikation $K \times K[x] \longrightarrow K[x]$

$$(s, A) \mapsto s \cdot_p A$$

s aufgefasst als
konstantes Polynom

$$(\text{explizit: } s \odot (\sum_i a_i X^i) = \sum_i (s a_i) X^i)$$

($(V1, V2)$ folgen aus $(R3)$

$(V3)$ folgt aus $(R2a)$

$(V4)$ folgt, da $1 \in K[x]$ neutral bzgl. $\cdot_p$)

(c) $\mathbb{C}$ ist (nicht nur $\mathbb{C}$ -VR sondern auch)
 $\mathbb{R}$ -VR bezüglich

$+$: gewöhnliche Add. in $\mathbb{C}$

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{Produkt in } \mathbb{C}$$
$$(r, x+iy) \mapsto r \cdot (x+iy)$$

aufgefasst
als $r+i \cdot 0 \in \mathbb{C}$

$$(\quad) (= rx + i ry)$$

Analog: $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{Q}$ -VR
 $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$ -VR.

(d) I Menge

$$\text{Abb}(I, \mathbb{R}) := \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \}$$

Def. für $f, g \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$:

$$f + g := \left(\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto f(i) + g(i) \end{array} \right) \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$$

$$s \odot f := \left(\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto s \cdot f(i) \end{array} \right) \in \text{Abb}(I, \mathbb{R})$$

Mit diesen Def. ist $(\text{Abb}(I, \mathbb{R}), +, \odot)$ ein
 $\mathbb{R}$ -VR [...].

4.1 Def.: Ein Vektorraum über K / K -Vektorr.
 $(V, +, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$
 zusammen mit einer Abbildung

$$\circ: K \times V \longrightarrow V$$

sodass $\forall r, s \in K$ und $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ gilt:

$$(V_1) \quad r \circ (\underline{u} + \underline{v}) = r \circ \underline{u} + r \circ \underline{v}$$

$$(V_2) \quad (r + s) \circ \underline{u} = r \circ \underline{u} + s \circ \underline{u}$$

$$(V_3) \quad (r \cdot s) \circ \underline{u} = r \circ (s \circ \underline{u})$$

$$(V_4) \quad 1 \circ \underline{u} = \underline{u}$$

4.2 Notiz: Es gilt dann ferner:

$$(a) \quad s \circ \underline{u} = \underline{0} \iff (s = 0 \vee \underline{u} = \underline{0})$$

$$(b) \quad (-1) \circ \underline{u} = -\underline{u}$$

Beweis:

$$a: (\Leftarrow) \quad 0 \circ \underline{u} = (0 + 0) \circ \underline{u} \stackrel{V_2}{=} 0 \circ \underline{u} + 0 \circ \underline{u} \quad | - 0 \circ \underline{u} \\ \underline{0} = 0 \circ \underline{u}$$

$$s \circ \underline{0} = s \circ (\underline{0} + \underline{0}) \stackrel{V_1}{=} s \circ \underline{0} + s \circ \underline{0} \quad | - s \circ \underline{0} \\ \underline{0} = s \circ \underline{0}$$

$$(\Rightarrow) \quad \text{Sei } s \circ \underline{u} = \underline{0}.$$

Falls $s = 0$: FERTIG.

Falls $s \neq 0$, so ist $s \in K^*$ (da K Körper),
 und somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{u} &\stackrel{V_4}{=} 1 \circ \underline{u} = (\tilde{s}^{-1} \cdot s) \circ \underline{u} \\ &\stackrel{V_3}{=} \tilde{s}^{-1} \circ (s \circ \underline{u}) \\ &= \tilde{s}^{-1} \circ \underline{0} \\ &\stackrel{a}{=} \underline{0} \end{aligned}$$

□

4.4 Def.: Sei $(V, +, \circ)$ ein K -VR. Ein K -Untervektorraum (UVR) von V ist eine Untergruppe U von $(V, +)$ derart, dass sich $\circ$ einschränken lässt zu einer Abb. $\circ: K \times U \longrightarrow U$ sodass $(U, +, \circ)$ selbst wieder ein K -VR ist.

4.5 Notiz: $U \subseteq V$ ist genau dann ein UVR, wenn gilt:

$$(UVR1) \quad \underline{0} \in U$$

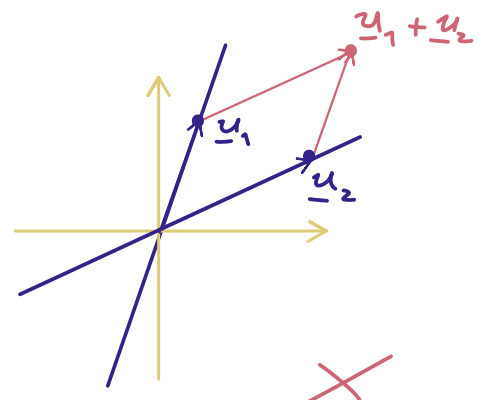
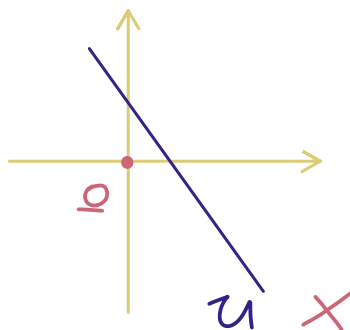
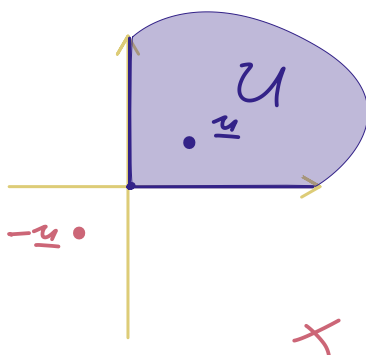
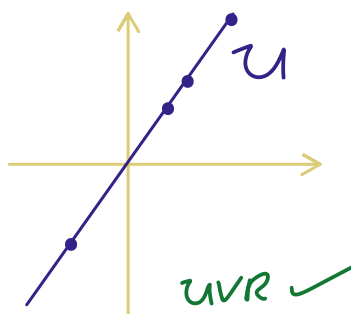
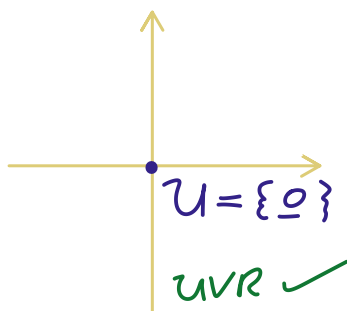
$$(UVR2) \quad \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \Rightarrow \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$$

$$(UVR3) \quad \underline{u} \in U, s \in K \Rightarrow s \circ \underline{u} \in U.$$

(Die Bedingung $\underline{u} \in U \Rightarrow -\underline{u} \in U$ folgt bereits aus (UVR3) mit $s := -1$.)

Beispiele:

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^2$$



(b) $K[X]_{\leq n} := \{ A \in K[X] \mid \deg A \leq n \}$ ($n \in \mathbb{N}_0$)
ist K -ZVR von $K[X]$

$K[X]_{> n} := \{ A \in K[X] \mid \deg A > n \}$
ist **kein** K -ZVR ($\neq 0$)

(c) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, z. B. $I = [0, 1]$ oder $I = \mathbb{R}$

$C^0(I) := \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\subseteq \text{Abb}(I, \mathbb{R})$

ist ein $\mathbb{R}$ -ZVR von $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$.

ab jetzt " $\cdot$ " oder " $\circ$ " für $\odot$

Konstruktionen mit UVR

$(V, +, \cdot)$ K-VR

4.6 Satz: Der Schnitt beliebiger K-UVR ist wieder ein K-UVR.

$$\left(\mathcal{U}_i \subseteq V \text{ UVR} \Rightarrow \bigcap_i \mathcal{U}_i \subseteq V \text{ UVR} \right)$$

Beweis:

Seien $\mathcal{U}_i \subseteq V$ ($i \in I$) UVR von V .

(UVR1) Da $\underline{0} \in \mathcal{U}_i$ für jedes $i \in I$, folgt
 $\underline{0} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

(UVR2) Seien $u_1, u_2 \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

Dann gilt für alle $i \in I$: $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_i$.

Da jedes $\mathcal{U}_i$ ein UVR ist, folgt
für alle $i \in I$: $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}_i$.

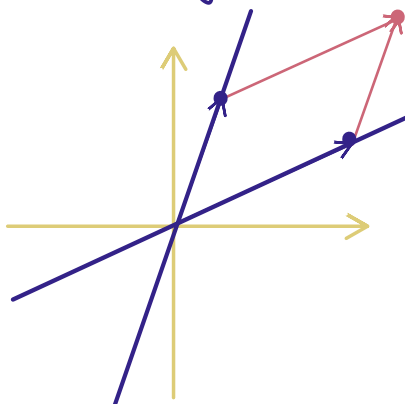
Also ist $u_1 + u_2 \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$

(UVR3) analog

□



Verenigungen von UVR sind i.A.
keine UVR, vgl. Bsp. 4.5 (a).



stattdessen: Summe (s.u.)

4.7 Def.: $(V, +, \cdot)$ K -VR, $M \subseteq V$ Teilmenge
 Eine K -Linearkombination von Vektoren aus M
 ist eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot v_i = s_1 \cdot v_1 + \dots + s_n \cdot v_n$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $v_i \in M$ für jedes i ,
 $s_i \in K$ für jedes i .

$$\left(\sum_{i=1}^0 := \underline{0} \right)$$

4.8 Def.: M, V wie in 4.7.

Die K -lineare Hülle $\langle M \rangle$ ist die Menge
 aller K -Linearkombinationen von Vektoren
 aus M .

4.9 Satz: M, V wie in 4.7.

$\langle M \rangle$ ist der kleinste K -UVR von V ,
 (d.h.: jeder UVR, der M enthält, der M enthält,
 enthält schon $\langle M \rangle$)

Beweis:

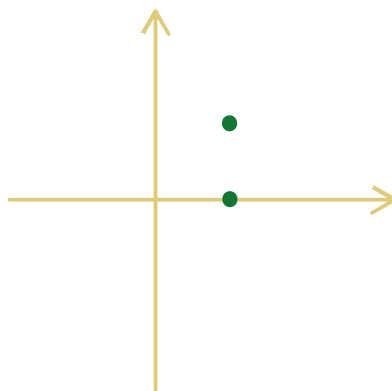
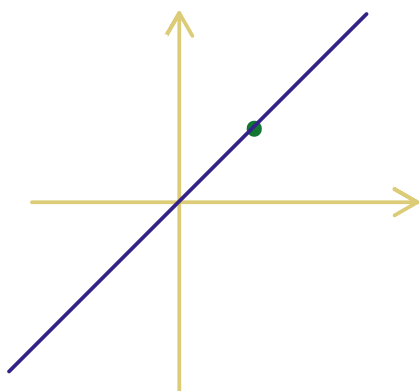
- $\langle M \rangle$ ist UVR, denn $\langle M \rangle$ erfüllt (UVR1, 2, 3)
 aus Notiz 4.5. [...]
- $M \subseteq \langle M \rangle$ (Schreibe $v \in M$ als $1 \cdot v$)
- Sei $U \subseteq V$ ein UVR mit $M \subseteq U$.
 Wegen (UVR3) ist $s \cdot v \in U$ für alle $v \in M$.
 Wegen (UVR2) ist $s_1 \cdot v_1 + \dots + s_n \cdot v_n \in U$
 für alle $v_i \in M$. Also ist $\langle M \rangle \subseteq U$. □

Beispiele:

(a) $\langle \emptyset \rangle = \{ \underline{0} \}$

(b) $V = \mathbb{R}^2$

$((V, +, \cdot)$ beliebig)



$$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \mathbb{R}^2$$

(c) $V = K[x]$

$$\langle \{ 1, x, x^2 \} \rangle = K[x]_{\leq 2}$$

$$\langle \{ x^i \mid i \in \mathbb{N}_0 \} \rangle = K[x]$$

4.10 Def.: $(V, +, \cdot)$ K-VR

Die interne Summe von zwei UVR $U_1, U_2 \subseteq V$ ist der UVR

$$U_1 + U_2 := \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

Allgemeiner: $\sum_{i \in I} U_i := \langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$

4.11 Notiz: $U_1 + U_2 = \{ \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_i \in U_i \}$

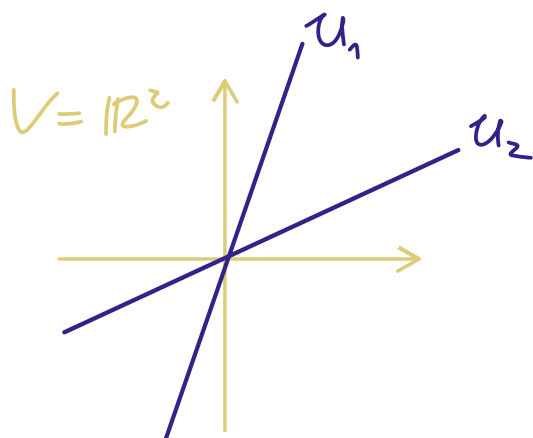
(($\supseteq$)) ✓

(($\subseteq$)) Jeder Vektor aus $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$ lässt sich schreiben als

$$\underbrace{s_1 \underline{v}_1 + \dots + s_k \underline{v}_k}_{\in U_1} + \underbrace{s'_1 \underline{v}'_1 + \dots + s'_{k'} \underline{v}'_{k'}}_{\in U_2}$$

mit $\underline{v}_i \in U_1$,
 $\underline{v}'_{i'} \in U_2$)

Beispiel:



$$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$$

$$U_1 + U_1 = U_1$$