

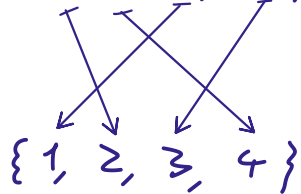
Die symmetrischen Gruppen

2.26 Def.: Eine n -stellige Permutation ist eine bijektive Abbildung $\sigma: \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, \dots, n\}$.
 $\downarrow \quad \quad \quad \mapsto$
 $\quad \quad \quad \sigma(i)$

Notation:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Bsp: $\{1, 2, 3, 4\}$



$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.27 Def.: Die symmetrische Gruppe von Grad n , S_n , ist die Menge aller n -stelligen Permutationen, zusammen mit der Komposition von Abb. ($\circ$) als Verknüpfung.

2.28 Satz: $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ und Inversen $\sigma^{-1} = \text{Umkehrabb. von } \sigma$

Beweis:

- Verknüpfung ist wohldef., denn die Komposition zweier bijektiver Abb. ist bijektiv. ✓
- assoziativ: Satz 1.19 ✓
- neutrales Element ✓
- Inverse ✓

□

Beispiele: $\checkmark$ id: $\{1\} \rightarrow \{1\}$

$$S_1 = \{id\}$$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau} \right\}$$

$$\tau^2 = \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \downarrow & \downarrow \\ \swarrow & \searrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = id$$

$$(S_2, \circ) \cong (\{\pm 1\}, \cdot) \quad \text{Gruppeniso [...]}$$

$$\begin{array}{ccc} id & \mapsto & 1 \\ \tau & \mapsto & -1 \end{array}$$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \swarrow & \searrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \swarrow & \searrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow S_3$ ist nicht abelsch!

2.29 Def.: $\sigma \in S_n$

(a) Ein Fehlstand von σ ist eine 2-elementige Teilmenge $\{i, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i < k$ und $\sigma(i) > \sigma(k)$.

(b) Das Signum von σ ist

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{|\{\text{Fehlstände von } \sigma\}|} \in \{\pm 1\}$$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \end{array}$$

hat 4 Fehlstände: $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1.$$

2.30 Satz: Das Signum ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{sgn}: (S_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$

$$\text{D.h.: } \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

Beweis:

Sei $F(\sigma) \in \mathbb{Z}$ die Anzahl der Fehlstände von σ .

Dann ist sgn die Komposition: Gruppeniso: Bsp. zu 2.25

$$\begin{array}{ccccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) & \xrightarrow{\cong} & (\{\pm 1\}, \cdot) \\ \sigma & \longmapsto & [F(\sigma)], [2] & \longmapsto & (-1)^2 \end{array}$$

Es reicht z.z.: diese Abb.

ist ein Gruppenhomo., also

$$[F(\sigma \circ \tau)] = [F(\sigma)] + [F(\tau)]$$

Für eine 2-elementige Menge $\{i, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
sind folgende 4 Fälle zu unterscheiden:

	Beitrag zu $[F(\tau)]$	Beitrag zu $[F(\sigma)]$	Beitrag zu $[F(\tau \circ \sigma)]$
① $\begin{array}{cc} i & k \\ \downarrow & \downarrow \\ \sigma(i) & \sigma(k) \\ \downarrow & \downarrow \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{array}$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
② $\begin{array}{cc} i & k \\ \swarrow & \searrow \\ \sigma(k) & \sigma(i) \\ \downarrow & \downarrow \\ \tau\sigma(k) & \tau\sigma(i) \end{array}$	$[0]$	$[1]$	$[1]$
③ $\begin{array}{cc} i & k \\ \downarrow & \downarrow \\ \sigma(i) & \sigma(k) \\ \swarrow & \searrow \\ \tau\sigma(k) & \tau\sigma(i) \end{array}$	$[1]$	$[0]$	$[1]$
④ $\begin{array}{cc} i & k \\ \swarrow & \searrow \\ \sigma(k) & \sigma(i) \\ \swarrow & \searrow \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{array} = \begin{array}{cc} i & k \\ \downarrow & \downarrow \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{array}$	$[1]$	$[1]$	$ \begin{array}{c} [0] \\ \parallel \\ [2] \end{array} $

In jedem Fall gilt:

$$\text{Beitrag zu } [F(\tau)] + \text{Beitrag zu } [F(\sigma)] = \text{Beitrag zu } [F(\tau \circ \sigma)]$$

Indem wir über alle $\{i, k\}$ summieren, erhalten

wir:

$$[F(\tau)] + [F(\sigma)] = [F(\tau \circ \sigma)]$$

□

Wie berechnet man $\text{sgn}(\sigma)$?

(a) mit Definition (Fehlstände / Kreuzungen zählen)

(b) mit Satz 2.30 & Zerlegung in Transpositionen

Transposition := Permutation der Form

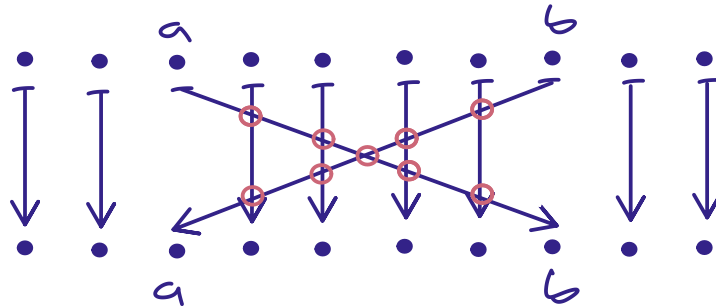
$$(a, b) := \begin{pmatrix} a & b & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & a & x \end{pmatrix}$$

für $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$

Jede Permutation lässt sich (auf viele verschiedene Weisen) zerlegen in eine Komposition von Transpositionen.

Es ist stets

$$\text{sgn}(a, b) = -1.$$



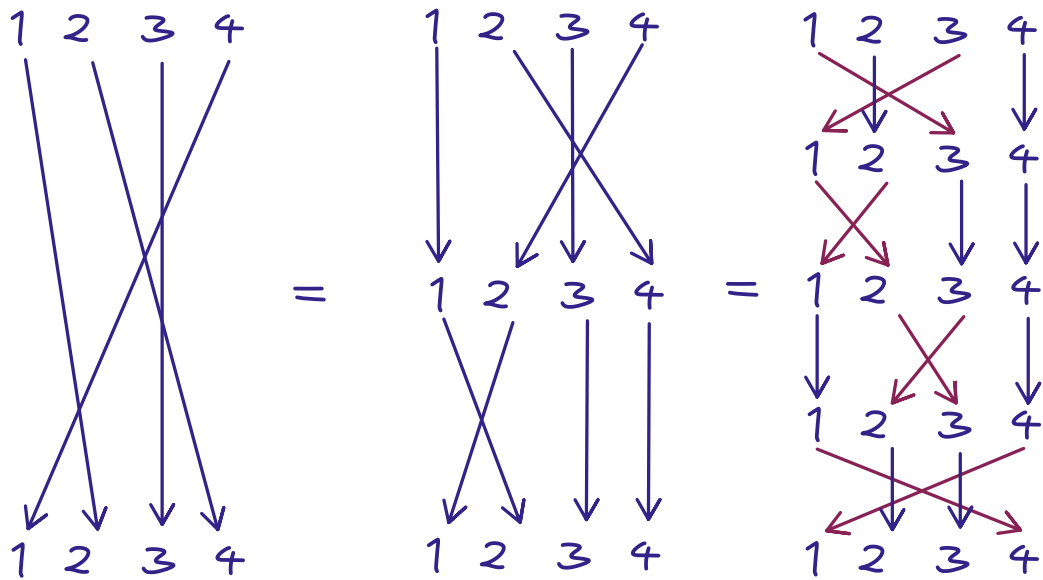
Für $\sigma = \underbrace{\tau_m \circ \dots \circ \tau_1}_{\text{Komposition von } m \text{ Transpos.}}$

Komposition von m Transpos.

gilt also

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

Bsp.: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12) \circ (24)$
 $= (14) \circ (23) \circ (12) \circ (13)$



$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = (-1)^4 = 1$$

(c) mit Satz 2.30 & Zykelzerlegung

Ein **Zykel** der Länge l ist eine Permutation der Form

$$(a_1 \xrightarrow{\quad} a_2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} a_l \xrightarrow{\quad} a_1) := \begin{cases} a_i & a_l & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_{i+1} & a_1 & x \end{cases}$$

für $i \in \{1, \dots, l-1\}$ für $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$

Jede Permutation σ lässt sich zerlegen in eine Komposition disjunkter Zyklen

$$\sigma = (a_1^{(m)} \dots a_{l_m}^{(m)}) \circ \dots \circ (a_1^{(1)} \dots a_{l_1}^{(1)})$$

(disjunkt heißt:

$$\{a_1^{(i)}, \dots, a_{\ell_i}^{(i)}\} \cap \{a_1^{(j)}, \dots, a_{\ell_j}^{(j)}\} = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

und diese Zerlegung ist sogar eindeutig bis auf Reihenfolge).

Für Zyklen der Länge ℓ ist

$$\text{sgn}(a_1 \dots a_\ell) = (-1)^{\ell-1}$$

(denn

$$(a_1 \dots a_\ell) = \underbrace{(a_1 a_2) \circ (a_1 a_3) \circ \dots \circ (a_1 a_\ell)}_{\ell-1 \text{ Transpositionen}}.$$

Also folgt für eine Zerlegung

$$\sigma = (a_1^{(\ell_m)} \dots a_{\ell_m}^{(\ell_m)}) \circ \dots \circ (a_1^{(\ell_1)} \dots a_{\ell_1}^{(\ell_1)}).$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) &= (-1)^{\ell_m-1} \cdot \dots \cdot (-1)^{\ell_1-1} \\ &= (-1)^{(\ell_m-1) + \dots + (\ell_1-1)}. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$$

$$= \underbrace{(1 \ 3 \ 6)}_{\ell_2=3} \circ \underbrace{(4 \ 5 \ 9 \ 7)}_{\ell_1=4}$$

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{3-1 + 4-1} = (-1)^5 = -1.$$

2.31 Def.: Die alternierende Gruppe A_n ist

$$A_n := \ker \left(\text{sgn}: (S_n, \cdot) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot) \right)$$

Nach Korollar 2.24 ist $A_n \leq S_n$ eine normale Untergruppe. Nach dem Isomorphiesatz 2.25 ist

$$\frac{S_n}{A_n} \cong (\{\pm 1\}, \cdot) .$$