

2. Gruppen

2.1 Def.: Eine Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$*: M \times M \longrightarrow M$$

Notation: $m * n := *(m, n)$

2.2 Def.: Eine Verknüpfung $*$ auf M ist...

... assoziativ, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in M: (x * y) * z = x * (y * z)$$

... kommutativ, falls gilt:

$$\forall x, y \in M: x * y = y * x$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + \\ \cdot \\ - \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{assoziativ} \\ \text{kommutativ} \end{array}$$

weder assoziativ
noch kommutativ

2.3 Def.: Eine Gruppe ist eine Menge G

zusammen mit einer Verknüpfung $*$, für die gilt:

(G1) $*$ ist assoziativ

(G2) $\exists$ neutrales Element:

$$\exists e \in G: \forall g \in G: e * g = g = g * e$$

(G3) $\exists$ Inverse:

$$\forall g \in G: \exists g' \in G: g * g' = e = g' * g$$

Ist außerdem $*$ kommutativ, ist die Gruppe abelsch.

Beispiele:

$(\mathbb{Z}, +)$ ist Gruppe, sogar abelsch, mit
 $e = 0, \quad g' = -g$

$(\mathbb{Q}, +)$
 $(\mathbb{R}, +)$ } abelsche Gruppen (genauso)

$(\mathbb{N}_0, +)$ keine Gruppe (Inverse fehlen)

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ keine Gruppe (Inverse fehlen)

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ keine Gruppe (kein Inverses zu 0)

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ } abelsche Gruppen mit $e = 1, g' = g^{-1}$

2.4 Notiz: Das neutrale Element e und das inverse Element g' zu einem Element g sind jeweils eindeutig.

Beweis:

Seien e, f zwei neutrale Elemente. Dann ist

$$e = e * f = f$$

f neutral $\uparrow$ e neutral $\uparrow$

Seien $g', \tilde{g}$ zwei Inverse zu g . Dann ist

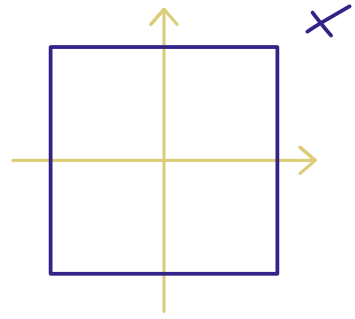
$$g' = g' * e = g' * (g * \tilde{g}) = (g' * g) * \tilde{g} = e * \tilde{g} = \tilde{g}$$

$\tilde{g}$ invers zu g $\uparrow$ (G1) $\uparrow$ g' invers zu g

□

2.5 Beispiel: Symmetriegruppen

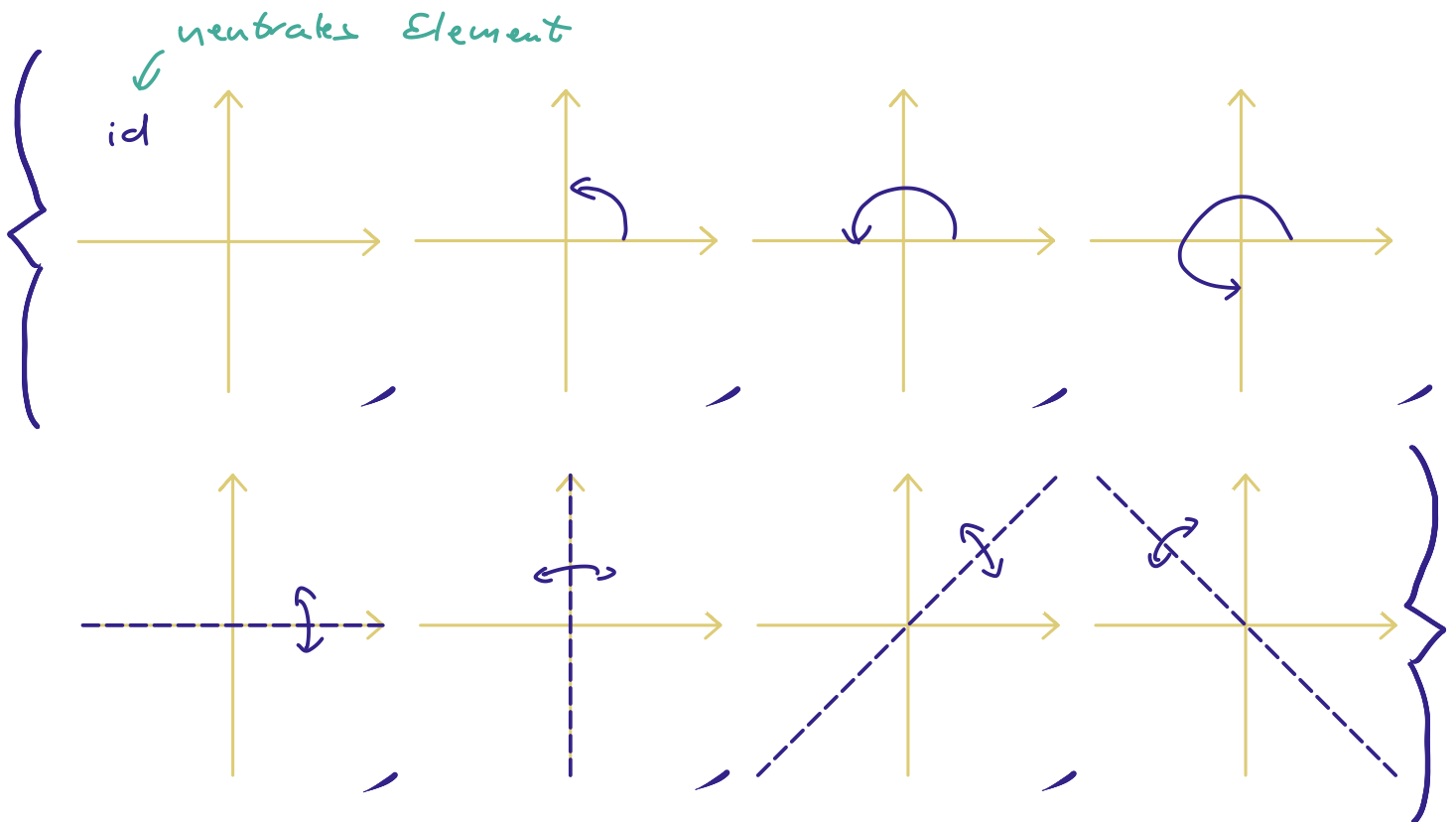
$X \subseteq \mathbb{R}^2$ Teilmenge, z.B.:



Die Symmetriegruppe von X ist die Menge aller Translationen, Rotationen und Achsenspiegelungen

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, für die gilt: $f(X) = X$,
zusammen mit Komposition $\circ$ als Verknüpfung.

Im Beispiel X oben:



2.6 Notation:

übliche Symbole für $\ast$ sind $+$ und $\cdot$.

	$+$	$\cdot$
neutrales Element	0	1
Inverses zu g :	$-g$	g^{-1}
für $n \in \mathbb{N}$:	$ng := \underbrace{g + \dots + g}_{n \text{ Summanden}}$	$g^n := \underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ Faktoren}}$
	$0g := 0$	$g^0 := 1$
	$-ng := -(ng)$	$g^{-n} := (g^n)^{-1}$

Üblicherweise verwenden wir „ $+$ “ nur für abelsche Gruppen.

2.7 Satz:

- (a) In jeder Gruppe $(G, \cdot)$ gilt: $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$
- (b) Ist G abelsch, gilt $\forall n \in \mathbb{Z}$: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Beweis:

a: Wegen Eindeutigkeit von Inversen, reicht es zu zeigen: $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = 1 = (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y)$.

Das lässt sich leicht nachrechnen, z.B.:

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) &= x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} \\ &\quad (G1) \\ &= x \cdot 1 \cdot x^{-1} \\ &= x \cdot x^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

b: Für $n \geq 0$ Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang (für $n=0$): $(x \cdot y)^0 = x^0 \cdot y^0$

- Das stimmt: $1 = 1 \cdot 1$ ✓

Induktionsschluss:

(IV) Für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

Wir zeigen, dass die Aussage auch für $n+1$

gilt:

$$\begin{aligned}(x \cdot y)^{n+1} &= (x \cdot y)^n \cdot (x \cdot y) \\ &= x^n \cdot y^n \cdot x \cdot y \\ &\quad \text{IV} \\ &= x^n \cdot x \cdot y^n \cdot y = x^{n+1} \cdot y^{n+1}.\end{aligned}$$

• kommutativ
nach Annahme

Für $n \leq 0$ lässt sich die Aussage analog zeigen. □

2.8 Def: Eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine Teilmenge $H \subseteq G$, für die gilt:

← neutrales Element von G

$$(U1) \quad 1_G \in H$$

$$(U2) \quad \forall x, y \in H: x \cdot y \in H$$

$$(U3) \quad \forall x \in H: x^{-1} \in H$$

2.9 Notiz: In diesem Fall ist H zusammen mit der auf H eingeschränkten Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot|_H: H \times H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

wieder eine Gruppe, mit 1_G als neutralem Element. Wir schreiben üblicherweise $(H, \cdot)$.

Bsp.:

(a) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert Untergruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

(b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ definiert Untergruppe $(\mathbb{Z}, +)$ von $(\mathbb{R}, +)$

(c) $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ definiert **keine** Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$
(für $n \in \mathbb{N}$ ist $-n \notin \mathbb{N}$)