

Abbildungen

1.16 Def.: A, B Mengen

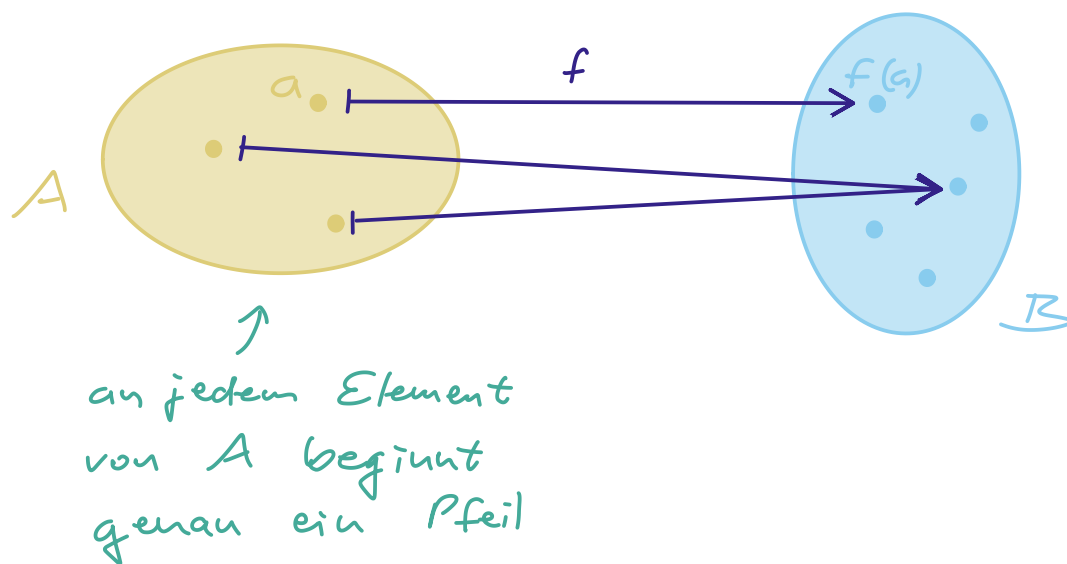
Eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ ist eine Zuordnung von genau einem Element $f(a) \in B$ zu jedem Element $a \in A$.

A : Definitionsbereich von f

B : Wertebereich von f

Zwei Abbildungen $\begin{cases} f: A \longrightarrow B \\ f': A' \longrightarrow B' \end{cases}$ sind gleich, wenn gilt:

$$A = A' \text{ und } B = B' \text{ und } \forall a \in A: f(a) = f'(a)$$



Beispiele:

$$(a) \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d.h.:} \quad f(a) = a^2$$
$$a \longmapsto a^2$$

$$(b) \quad g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{d.h.:} \quad g(a) = a^2$$
$$a \longmapsto a^2$$

$$f \neq g !$$

$$(c) \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$a \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wichtige Beispiele:

(a) M beliebige Menge

$$\text{id}_M: \underset{m}{M} \longrightarrow \underset{m}{M}$$

Identität auf M

(b) $N \subseteq M$ Teilmenge

$$\underset{n}{N} \longrightarrow \underset{n}{M}$$

Inklusion von N in M

(c) N, M beliebig

$$\begin{array}{ccc} N \times M & \longrightarrow & M \\ (n, m) & \mapsto & m \end{array}$$

Projektion auf M

Natürlich ist nicht jede Abbildungsvorschrift zulässig, z. B.:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a & \mapsto & \cancel{a}^2 \end{array}$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- es gibt $a \in \mathbb{R}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{Z}$) liegen

- für $a \in \mathbb{Z}$ ist der zugeordnete Wert nicht eindeutig

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} & \mapsto & p \end{array}$$

nicht eindeutig, denn z. B.

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

Obige „Abbildungen“ sind nicht wohldefiniert.

1.17 Def.: $f: A \longrightarrow B$ Abbildung

Ist $f(a) = b$ nennen wir:

b das Bild von a

a ein Urbild von b

Das Bild einer Teilmenge $A' \subseteq A$ ist

$$f(A') := \{ b \in B \mid \exists a' \in A': f(a') = b \} \\ = \{ f(a') \mid a' \in A' \}$$

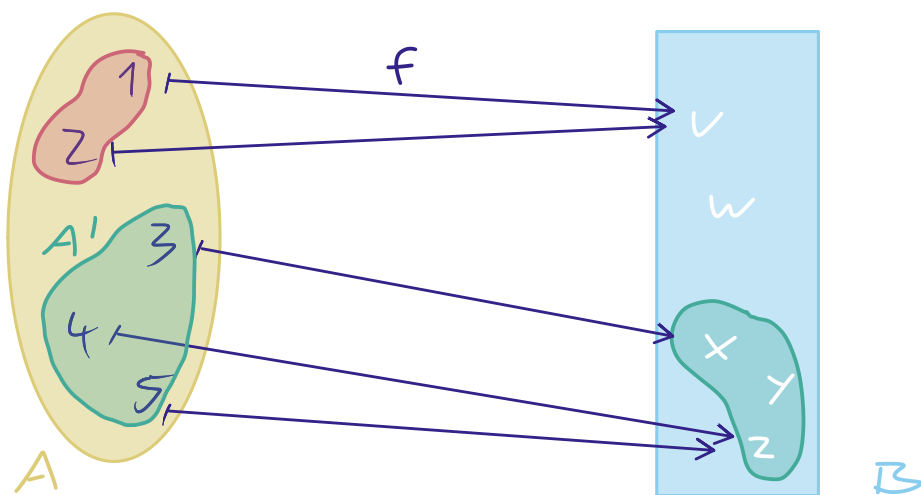
Das Bild von f ist $f(A)$.

Das Urbild einer Teilmenge $B' \subseteq B$ ist

$$f^{-1}(B') := \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$$

Die Faser eines $b \in B$ ist

$$f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\}) \\ = \{ a \in A \mid f(a) = b \}$$



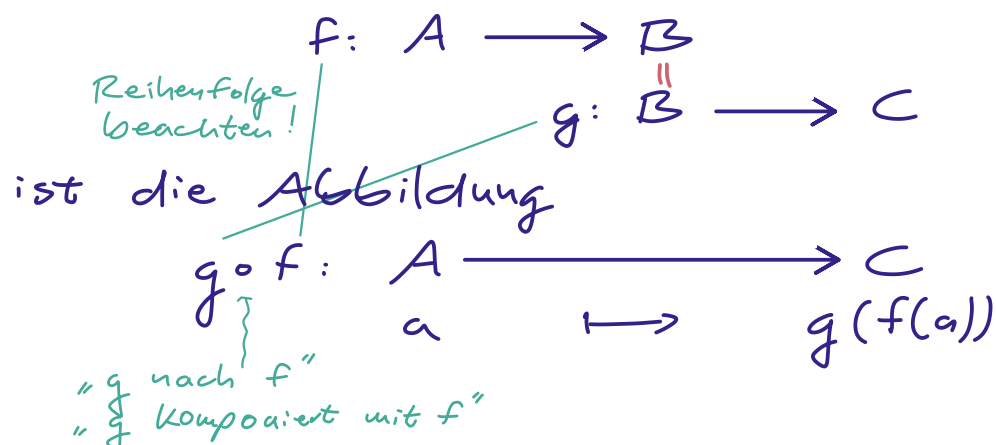
$$f^{-1}(v) = \{1, 2\}$$

$$f^{-1}(w) = \emptyset$$

$$f(A') = \{x, z\}$$

$$f(A) = \{v, x, z\}$$

1.18 Def.: Die Komposition zweier Abbildungen



$$\text{Also } (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

1.19 Satz:

(a) Komposition ist assoziativ, d.h.:

ist $h: C \longrightarrow D$ weitere Abbildung, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(b) $\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A$

Beweis:

a: Definitionsbereich von $h \circ (g \circ f)$ ist A } ✓
Definitionsbereich von $(h \circ g) \circ f$ ist A } ✓
Wertebereich von $h \circ (g \circ f)$ ist D } ✓
Wertebereich von $(h \circ g) \circ f$ ist D } ✓

Abbildungsvorschriften stimmen überein:

für $a \in A$ gilt:

$$(h \circ (g \circ f))(a) \stackrel{\text{Def.}}{=} h((g \circ f)(a))$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} h(g(f(a)))$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} (h \circ g)(f(a))$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} ((h \circ g) \circ f)(a) \quad \checkmark$$

b: Übung.



1.20 Def.: Eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ ist ein Isomorphismus von Mengen, wenn eine Abbildung

$$g: B \longrightarrow A \quad \text{---} \quad A \longleftarrow B: g$$

existiert, sodass gilt:

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

In dieser Situation heißt g Umkehrabbildung von f , geschrieben $g = f^{-1}$.



Notation " f^{-1} " wird auch für Urbild/Faser verwendet (Def. 16), selbst dann wenn keine Umkehrabbildung von f existiert.

Zwei Mengen A und B sind isomorph, geschrieben $A \cong B$, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Beispiele

$$(a) \quad \{a, b, c\} \cong \{1, 2, 3\}$$

$$\text{z.B. } f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 2 \\ c & \mapsto & 3 \end{array}$$

$$\{a, b, c\} \longleftarrow \{1, 2, 3\} : g$$

$$\begin{array}{ccc} a & \longleftarrow & 1 \\ b & \longleftarrow & 2 \\ c & \longleftarrow & 3 \end{array}$$

(b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein Isomorphismus
 $x \mapsto x+1$
 mit Umkehrabb.

$$\mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R}: g$$

$$x-1 \longleftarrow x$$

(c) $\{a, b, c\} \not\cong \{1, 2\}$ (Übung)

1.21 Notiz: Die Umkehrabb. ist, falls sie existiert, eindeutig: sind g_1 und g_2 Umkehrabb. von f , so folgt bereits

$$g_1 = g_2,$$

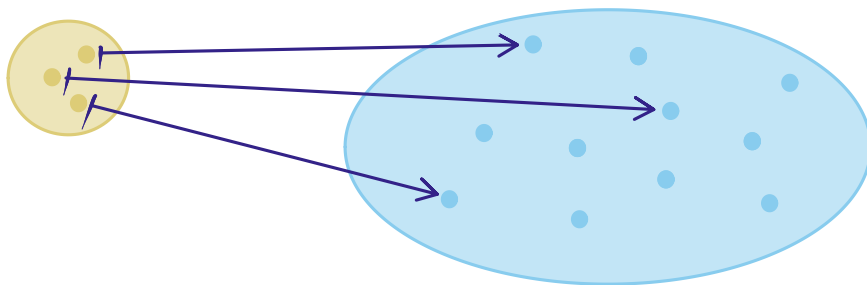
denn:

$$\overset{1.5(b)}{g_1} = g_1 \circ \text{id}_B = g_1 \circ \underbrace{(f \circ \underbrace{g_2}_{\text{id}_B})}_{\text{id}_A} = \underbrace{(g_1 \circ f)}_{\text{id}_A} \circ g_2 = \text{id}_A \circ \overset{1.5(b)}{g_2} = g_2$$

1.22 Def.: Eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ ist ...

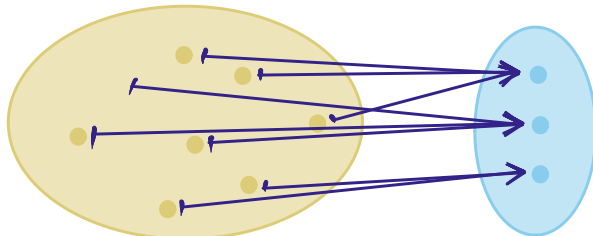
... injektiv $:(\Leftrightarrow)$ jedes $b \in B$ hat höchstens ein Urbild

$\hookrightarrow \Leftrightarrow (\forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$
 $\Leftrightarrow (\forall a, a' \in A: a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$



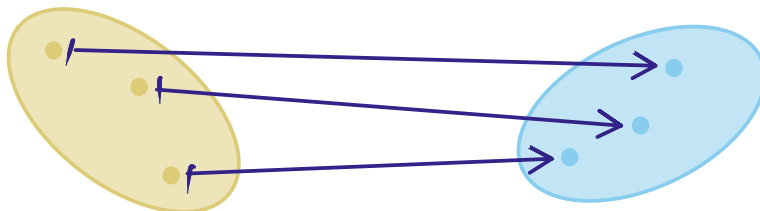
... surjektiv $:(\Leftrightarrow)$ jedes $b \in B$ hat mindestens ein Urbild

$\longrightarrow \Leftrightarrow (\forall b \in B: \exists a \in A: f(a) = b)$



... bijektiv $:(\Leftrightarrow)$ jedes $b \in B$ hat genau ein Urbild

$\xrightarrow{\equiv} \Leftrightarrow (\forall b \in B: \underbrace{\exists!}_{\substack{\text{es existiert} \\ \text{genau ein}}} a \in A: f(a) = b)$



1.23 Satz: Für eine Abbildung f sind äquivalent:

- (a) f ist ein Isomorphismus von Mengen
(b) f ist bijektiv
(c) f ist injektiv und surjektiv.

Beweis: „Ringschluss“ es reicht, zu zeigen

$$(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$$

Sei also $f: A \rightarrow B$ gegeben.

(a $\Rightarrow$ c) Sei g Umkehrabb. von f .

f inj.: Seien $a, a' \in A$ beliebig mit $f(a) = f(a')$.

$$\text{zz: } a = a'$$

$$a = \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ Umkehrabb.}}}{g}(f(a)) = \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ Umkehrabb.}}}{g}(f(a')) = a' \quad \checkmark$$

f surj.: Sei $b \in B$ beliebig. Dann ist $a := g(b)$ ein Element aus A mit $f(a) = b$:

$$f(a) = f(\underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ Umkehrabb.}}}{g}(b)) = b.$$

(c $\Rightarrow$ b) Selbststudium

(b $\Rightarrow$ a) Sei f bijektiv.

Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a_b \in A$ mit

(*) $f(a_b) = b$. Definiere also

$$\begin{array}{ccc} A & \longleftarrow & B : g \\ a_b & \longleftarrow & b \end{array}$$

Wir prüfen noch:

$f \circ g = \text{id}_B$: Für $b \in B$ gilt

$$f(g(b)) = f(a_b) = b \quad \checkmark$$

Def. $\uparrow$ (*)

$g \circ f = \text{id}_A$: Für $a \in A$ ist zu zeigen

$g(f(a)) = a.$

Dazu bemerken wir zunächst:

$$f(g(f(a))) = (f \circ g)(f(a)) = f(a),$$

$\uparrow$ $f \circ g = \text{id}_B$, s.o.

also

$$f(g(f(a))) = f(a)$$

Da f insbesondere injektiv ist, folgt hieraus:

$$g(f(a)) = a$$



1.24 Def.: Eine Menge M ist

... endlich (von Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$), falls

$$M \cong \{1, \dots, n\} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0$$

$$(M = \emptyset \quad \text{falls } n = 0)$$

Notation:

$$|M| = n$$

... unendlich, falls dies für kein $n \in \mathbb{N}_0$ der Fall ist.

Eine unendliche Menge M ist...

... abzählbar unendlich, falls $M \cong \mathbb{N}$.

Notation:

$$|M| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0 \text{ „Aleph“ } 0)$$

... andernfalls überabzählbar unendlich

$$|M| > |\mathbb{N}|$$

1.25 Bemerkung: Die folgenden Aussagen über zwei Mengen M, N sind also äquivalent:

- $M \cong N$
- Es gibt eine Bijektion (bijektive Abbildung) zwischen M und N
- M und N haben dieselbe Kardinalität

Beispiele:

(a) $|\mathbb{N}_0| \cong |\mathbb{N}|$, denn $\mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}_0$
 $n \mapsto n-1$

(b) $|\mathbb{Z}| \cong |\mathbb{N}|$, denn $\mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$
 $n \mapsto \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

(also

1	$\mapsto$	0
2	$\mapsto$	1
3	$\mapsto$	-1
4	$\mapsto$	2
5	$\mapsto$	-2
6	$\mapsto$	3
7	$\mapsto$	-3
8	$\mapsto$	4
9	$\mapsto$	-4
$\vdots$		$\vdots$

)

(c) $|\mathbb{Q}_{>0}| \cong |\mathbb{N}|$
 $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$

Idee:

¹ $\frac{1}{1}$	² $\frac{2}{1}$	³ $\frac{3}{1}$	⁴ $\frac{4}{1}$	⁶ $\frac{6}{1}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	...	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	...	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

usw.

(d) $|\mathbb{Q}| \cong |\mathbb{N}|$

(e) $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Idee: siehe z.B. Hilberts Hotel

<https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY>

1.26 Satz: Für eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ zwischen endlichen Mengen derselben Kardinalität sind äquivalent:

- (a) f ist bijektiv
- (b) f ist injektiv
- (c) f ist surjektiv



Satz ist falsch für unendliche Mengen

z.B.: $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto 2 \cdot n$

— injektiv, aber nicht surjektiv

z.B.: $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n=1 \\ n-1 & \text{sonst} \end{cases}$

— surjektiv, aber nicht injektiv

Beweis:

Da $(a) \Leftrightarrow (b) \wedge (c)$, reicht es, zu zeigen:

$(b) \Leftrightarrow (c)$

Dazu überlegen wir uns zunächst, dass für endliche Mengen A, B gilt:

(i) f injektiv $\Leftrightarrow |f(A)| = |A|$
 $(\Rightarrow)$ gilt immer,
 $(\Leftarrow)$ nur für endliches A ,
 vgl. Beispiel f_2 oben)

(s) f surjektiv $\stackrel{\text{Def. surj.}}{\Leftrightarrow} f(A) = B$
 $\stackrel{B \text{ endlich}}{\Leftrightarrow} |f(A)| = |B|$

Nehmen wir also zusätzlich an

$$(V) \quad |A| = |B|,$$

können wir folgern:

$$(b \Rightarrow c) \quad |f(A)| \stackrel{(i)}{=} |A| \stackrel{(V)}{=} |B|$$

$$(c \Rightarrow b) \quad |f(A)| \stackrel{(s)}{=} |B| \stackrel{(V)}{=} |A|$$

