Lineare Algebra I, Test 3
Überblick: Alle Fragen, alle Antworten

Aufgabe 1 Im Folgenden sei K ein Körper, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ein n-Tupel von (Spalten-)Vektoren aus K^m. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w)	(f)	
☺		Das Tupel ist genau dann linear unabhängig, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.
	☹	Das Tupel ist genau dann linear unabhängig, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang m hat.
	☹	Das Tupel ist genau dann ein Erzeugendensystem von K^m, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.
☺		Das Tupel ist genau dann ein Erzeugendensystem von K^m, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang m hat.
☺		Falls das Tupel linear unabhängig ist, ist notwendigerweise $n \leq m$.
	☹	Falls das Tupel ein Erzeugendensystem ist, ist notwendigerweise $n \leq m$.
	☹	Falls das Tupel ein Erzeugendensystem ist, ist notwendigerweise $n = m$.
☺		Falls das Tupel eine Basis ist, ist notwendigerweise $n = m$.

Aufgabe 2 Sei K ein Körper und A eine $m \times n$-Matrix über K. Seien ferner $\mathbf{x} \in K^n$ und $\mathbf{b} \in K^m$, sodass wir also die linearen Gleichungssysteme $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ und $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ betrachten können. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(w)	(f)	
☺		A lässt sich durch Zeilen- und Spaltentransformationen auf Normalform bringen.
☺		Der Zeilenrang von A ändert sich unter Spaltentransformationen *nicht.*
	☹	A lässt sich durch Zeilentransformationen auf Normalform bringen.
☺		A lässt sich durch Zeilentransformationen auf Zeilenstufenform bringen.
☺		Der Lösungsraum von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ändert sich unter Zeilentransformationen von A *nicht.*
	☹	Der Lösungsraum von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ändert sich unter Spaltentransformationen von A *nicht.*
☺		Die Dimension des Lösungsraums von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ändert sich unter Spaltentransformationen von A *nicht.*
☺		Das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt (mindestens) eine Lösung.
	☹	Das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ besitzt (mindestens) eine Lösung.
	☹	Der Lösungsraum von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist ein Untervektorraum von K^n.
☺		Der Lösungsraum von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist ein Untervektorraum von K^n.

Aufgabe 3 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt.

☹ Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie quadratisch ist.

☹ Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie nicht die Nullmatrix ist.

☺ Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn die durch sie definierte lineare Abbildung ein Isomorphismus ist.

☺ Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn die durch sie definierte lineare Abbildung injektiv ist.

☹ Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension des Kerns der durch sie definierten linearen Abbildung.

☺ Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension des Bildes der durch sie definierten linearen Abbildung.

☺ Der Rang einer Matrix ist das Maximum von Spaltenrang und Zeilenrang.

☹ Der Spaltenrang einer Matrix ist genau dann gleich dem Zeilenrang der Matrix, wenn die Matrix quadratisch ist.

☹ Der Spaltenrang einer Matrix ist genau dann gleich dem Zeilenrang der Matrix, wenn die Matrix invertierbar ist.

Aufgabe 4 V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, W ein Untervektorraum, V/W der Quotientenvektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ Die Dimension von V ist gleich der Anzahl der Elemente einer Basis von V.

☹ Die Dimension von V ist die minimale Länge eines linear unabhängigen Tupels von Vektoren aus V.

☺ Die Dimension von V ist die minimale Länge eines Erzeugendensystems von V.

☺ $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

☹ $\dim(V/W) = \dim V / \dim W$

☺ Falls $\dim W = \dim V$, folgt $W = V$.

☺ $\dim W \leq \dim V$

Aufgabe 5 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ Die Menge $\{0, 1\}$, versehen mit einer geeigneten Addition und Multiplikation, ist ein Körper.

☹ Der Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper.

☹ Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit ihrer üblichen Ringstruktur sind ein Körper.

☺ Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit ihrer üblichen Ringstruktur sind ein Körper.

☺ Der Ring $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ist ein Körper.

☺ Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit ihrer üblichen Ringstruktur sind ein Körper.

☹ Der Ring der reellen 2×2-Matrizen ist ein Körper.

Aufgabe 6 In dieser Aufgabe sei $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$, aufgefasst als reeller Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

- ☹ Die Menge der Polynome von Grad mindestens 1, also $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \geq 1\}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
- ☺ Die Menge der Polynome von Grad höchstens 1, also $\{aX + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
- ☹ Die Menge der Monome, also $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
- ☺ Die Menge, die nur aus dem Nullpolynom besteht, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
- ☹ Die leere Menge ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.
- ☹ Die Menge aller Polynome $\sum_i a_i X^i$ mit nicht-negativen Koeffizienten (also mit $a_i \geq 0$ für alle i) ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.