Lineare Algebra I
Test 3

Es gibt insgesamt 6 Aufgaben. Kreuzen Sie bei jeder Aussage an, ob Sie wahr (w) oder falsch (f) ist. Je Aufgabe erhalten Sie als Punktzahl die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte.

Aufgabe 1 Im Folgenden sei K ein Körper, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ein n-Tupel von (Spalten-)Vektoren aus K^m. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)
- ☺ ☹ Das Tupel ist genau dann ein Erzeugendensystem von K^m, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang m hat.
- ☺ ☹ Falls das Tupel ein Erzeugendensystem ist, ist notwendigerweise $n = m$.
- ☺ ☹ Das Tupel ist genau dann linear unabhängig, wenn es – aufgefasst als Matrix – Rang n hat.
- ☺ ☹ Falls das Tupel linear unabhängig ist, ist notwendigerweise $n \leq m$.
- ☺ ☹ Falls das Tupel ein Erzeugendensystem ist, ist notwendigerweise $n \leq m$.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)
- ☺ ☹ Der Ring $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ist ein Körper.
- ☺ ☹ Der Ring der reellen 2×2-Matrizen ist ein Körper.
- ☺ ☹ Die Menge $\{0, 1\}$, versehen mit einer geeigneten Addition und Multiplikation, ist ein Körper.
- ☺ ☹ Der Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper.
- ☺ ☹ Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit ihrer üblichen Ringstruktur sind ein Körper.

Aufgabe 3 Sei K ein Körper und A eine $m \times n$-Matrix über K. Seien ferner $\mathbf{x} \in K^n$ und $\mathbf{b} \in K^m$, sodass wir also die linearen Gleichungssysteme $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ und $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ betrachten können. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(w) (f)
- ☺ ☹ Der Zeilenrang von A ändert sich unter Spaltentransformationen *nicht*.
- ☺ ☹ Der Lösungsraum von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist ein Untervektorraum von K^n.
- ☺ ☹ A lässt sich durch Zeilen- und Spaltentransformationen auf Normalform bringen.
- ☺ ☹ Das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzt (mindestens) eine Lösung.
- ☺ ☹ Die Dimension des Lösungsraums von $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ändert sich unter Spaltentransformationen von A *nicht*.

Aufgabe 4 V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, W ein Untervektorraum, V/W der Quotientenvektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ ☹ Falls $\dim W = \dim V$, folgt $W = V$.

☺ ☹ Die Dimension von V ist die minimale Länge eines Erzeugendensystems von V.

☺ ☹ $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

☺ ☹ $\dim W \leq \dim V$

☺ ☹ Die Dimension von V ist die minimale Länge eines linear unabhängigen Tupels von Vektoren aus V.

Aufgabe 5 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ ☹ Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie quadratisch ist.

☺ ☹ Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn die durch sie definierte lineare Abbildung ein Isomorphismus ist.

☺ ☹ Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie nicht die Nullmatrix ist.

☺ ☹ Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang besitzt.

☺ ☹ Der Rang einer Matrix ist das Maximum von Spaltenrang und Zeilenrang.

Aufgabe 6 In dieser Aufgabe sei $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$, aufgefasst als reeller Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) (f)

☺ ☹ Die Menge, die nur aus dem Nullpolynom besteht, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☺ ☹ Die Menge der Polynome von Grad höchstens 1, also $\{aX + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☺ ☹ Die Menge aller Polynome $\sum_i a_i X^i$ mit nicht-negativen Koeffizienten (also mit $a_i \geq 0$ für alle i) ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☺ ☹ Die leere Menge ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

☺ ☹ Die Menge der Monome, also $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

Name in Druckbuchstaben: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Bitte merken Sie sich für die Rückgabe die Nummer Ihrer Abgabe: 1