

1 | Spindel

Welche reellen 2×2 -Matrizen kommutieren mit allen reellen 2×2 -Matrizen? Das heißt, für welche $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$?

Beh.: $A \cdot B = B \cdot A \quad \forall B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$

genau dann, wenn

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ für ein } a \in \mathbb{R}$$

Beweis:

($\Downarrow$) Ansatz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

z.B. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\quad \parallel \quad \parallel$$
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also folgt aus (*):
 $c = 0$ und $a = d$

z.B. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\quad \parallel \quad \parallel$$
$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Also folgt aus (*):
 $b = 0$ und $a = d$

Also hat A die Form $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (\uparrow) \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot B &= a \cdot 1_2 \cdot B \\
 &= a \cdot B \\
 &= a \cdot B \cdot 1_2 \\
 &= B \cdot a \cdot 1_2 \\
 &= B \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

2 | Schema G

Bringen Sie die folgende Matrix mittels des Gaußverfahrens (a) auf Zeilenstufenform, (b) auf Zeilennormalform, und (c) auf Normalform (siehe Beweis von Satz 6.26). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Operation Sie durchführen!

a: ZNF

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 28 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \frac{1}{48}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b: ZNF

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ -4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c: Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

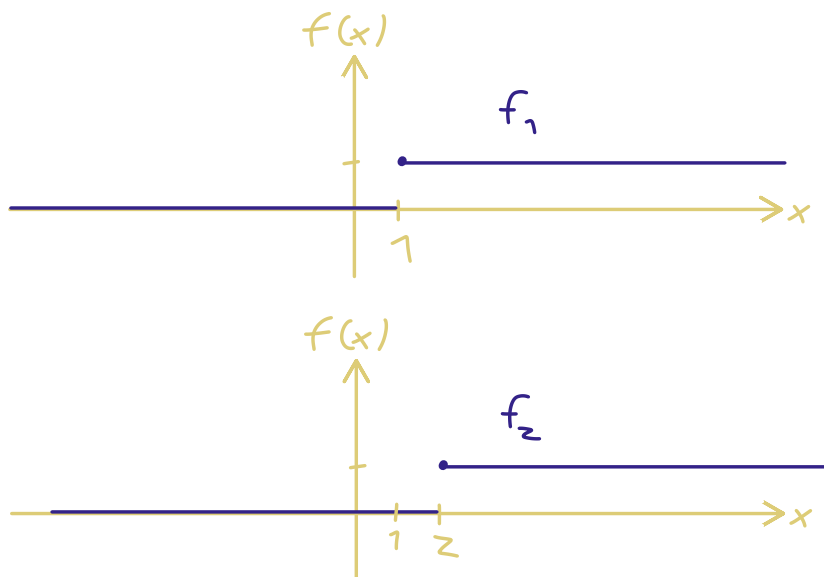
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 | Stufentupel ★

Die Menge der Abbildungen $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist bezüglich der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum – siehe Vorlesung, Beispiel (d) nach Notiz 4.2 oder den Beweis zu Satz 6.5. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die folgende Abbildung:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

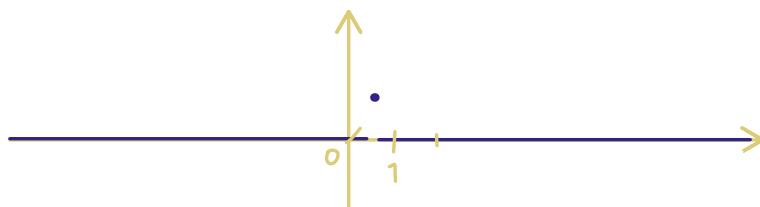
Ist das Tupel $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ linear unabhängig in $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Ist es ein Erzeugendensystem?



$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kein Erzeugendensystem:

Lösung A

Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Für jeder der Abb. f_n gilt:
$$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Also gilt auch für jede Linearkombination derselben:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{i \\ \text{endlich}}} a_i \cdot f_i \right) \left(\frac{1}{4} \right) &= \sum_i a_i \cdot f_i \left(\frac{1}{4} \right) \\ &= \sum_i a_i \cdot f_i \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\sum_{\substack{i \\ \text{endlich}}} a_i \cdot f_i \right) \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$a_i \in \mathbb{R}$

Hingegen gilt für obige Abb. f :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Also ist f keine Linearkombination der f_n .

Lösung B

Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1$

Für eine Linearkombination

$$f' := a_1 f_{u_1} + \dots + a_k f_{u_k} \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

gilt:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x < \min\{u_j\}.$$

Also ist $f' \neq f$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist linear unabh.:

Sei $\sum_{j=1}^k a_j f_{n_j} = 0$ für gewisse $a_j \in \mathbb{R}$.

zz: $a_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.

Wir zeigen das durch Induktion über k .

IA: $k=0$ – nicht zu zeigen

IS: Sei $\sum_{j=1}^{k+1} a_j f_{n_j} = 0$

Sei $\emptyset \neq n_1 > n_2 > \dots > n_{k+1}$.

Dann gilt an $x = n_1 + \frac{1}{2}$:

$$f_{n_i}(x) = 0 \quad \text{für } i \neq k+1$$

$$f_{n_{k+1}}(x) = 1$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} 0 = 0(x) &= \left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j f_{n_j} \right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} a_j f_{n_j}(x) \\ &= a_{k+1} \cdot 1 = a_{k+1} \end{aligned}$$

Also $a_{k+1} = 0$ und somit

$$\sum_{j=2}^k a_j f_{n_j} = 0$$

und aus **IV** folgt:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$



4 | Projektion ★

Sei $p: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V mit $p \circ p = p$.

- (a) Gibt es einen derartigen Endomorphismus auf $V = \mathbb{R}^3$?
 (b) Zeigen Sie, dass für jeden solchen Endomorphismus gilt: $\ker(p) + \operatorname{im}(p) = V$ und $\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{0\}$.
 Insbesondere folgt also nach Aufgabe 3 auf Blatt 8:

$$V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p).$$

a: z.B.:

$$\operatorname{id}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$0: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{oder: } \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder: } \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder: } \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$b: V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$$

$$V = \ker(p) + \operatorname{im}(p)$$

Sei $\underline{v} \in V$ beliebig.

Dann ist

$$\underline{v} = \underbrace{(\underline{v} - p(\underline{v}))}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(\underline{v})}_{\in \operatorname{im}(p)}$$

$$p(\underline{v} - p(\underline{v})) = p(\underline{v}) - p(p(\underline{v}))$$

$$\stackrel{p \text{ linear}}{=} p(\underline{v}) - p(\underline{v})$$

$$\stackrel{p \circ p = p}{=} \underline{0}$$

$$\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{\underline{0}\}$$

Sei $\underline{v} \in \ker(p) \cap \operatorname{im}(p)$.

Da $\underline{v} \in \operatorname{im}(p)$, ist
 $\underline{v} = p(\underline{w})$ für ein $\underline{w}$,

also ist

$$\begin{aligned} p(\underline{v}) &= p(p(\underline{w})) \\ &= p(\underline{w}) \end{aligned}$$

$$p \circ p = p \quad \xrightarrow{\quad} \quad \underline{v} \quad (*)$$

Da $\underline{v} \in \ker(p)$, gilt
andererseits:

$$p(\underline{v}) = \underline{0}. \quad (\#)$$

Aus $(*)$ & $(\#)$ folgt:

$$\underline{v} = \underline{0}.$$

