

1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f , g , h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z - 3w \\ y - 3w \end{pmatrix}$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(g \circ f) = ?$$

Option A:

$$\begin{aligned} g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= g \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ 3x + 2y - z \\ z + 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 7x - 3 \cdot (x - y) \\ 3x + 2y - z - 3 \cdot (x - y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x + 3y + z \\ 5y - z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{also: } M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Option B:

$$\begin{aligned} M(g \circ f) &= M(g) \cdot M(f) \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiter mit Option B:

$$\begin{aligned} M(h \circ g) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(h \circ g \circ f) &= M(h) \cdot M(g \circ f) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 | Rank and File

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind injektiv?
Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Injektivität — keine der Abb. ist injektiv:

Rangformel 5.17 für lineare Abb. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
besagt:

$$\text{rk}(f) = 4 - \dim(\ker f).$$

Da $\text{im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, ist andererseits $\text{rk}(f) \leq 3$.

Also ist

$$\dim(\ker f) \geq 1.$$

Insbesondere ist $\ker f \neq \{0\}$, somit f nach
Injektiv.-kriterium nicht injektiv.

Surjektivität von f_A

kurzeste Option: Rang bestimmen mit Rezept 6.27

[Anmerkung: Dieser Weg stand noch nicht zur Verfügung, als Aufgabe gestellt wurde.]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -1 \end{pmatrix} \quad - \text{ZSF}$$

$\text{rk}(A) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, also ist $\text{im } f_A = \mathbb{R}^3$,
also f_A surjektiv.

Option direktes Nachrechnen

[Anmerkung: Dieser Weg stand bei Aufgabenstellung zur Verfügung, auch wenn das konkrete Rechenverfahren und die Notation, die in dieser Musterlösung verwendet werden, erst später eingeführt wurden.]

f_A ist surjektiv, falls

$$f_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

für beliebiges $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung besitzt,
wenn also

$$\mathcal{L}(A, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$$

nicht leer ist. Verwende hierzu z.B. Rezept 6.28:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \end{array} \right)$$

Die ZSF hat keine Nullzeilen, also ist

$$\mathcal{L}(A, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) \neq \emptyset.$$

und somit f_A surjektiv.

Surjektivität von f_B

(kürzeste Option)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \cdot 2 \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow (-1) \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(B) = 2 < 3$, also ist f_B nicht surjektiv.

Surjektivität von f_C

(kürzeste Option)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \cdot (-1) \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -\tfrac{1}{2} & 2 & -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \updownarrow \cdot \tfrac{1}{2} \\ \updownarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(C) = 3$, also ist f_C surjektiv.

3 | Erbsenzählen ★

Beweisen Sie:

- (a) Ein $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum der Dimension n hat p^n Elemente.
- (b) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind kein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

Sie dürfen verwenden, dass ein endliches Produkt endlich vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, und dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

(a) Für $\mathbb{F}_p$ -VR V der Dimension n gilt nach dem Hauptsatz:

$$V \cong (\mathbb{F}_p)^n = \underbrace{\mathbb{F}_p + \dots + \mathbb{F}_p}_n \text{ Faktoren}$$

Also ist

$$|V| = |(\mathbb{F}_p)^n| = |\mathbb{F}_p|^n = p^n.$$

(b) Wäre $\mathbb{R}$ endlich-dim. als $\mathbb{Q}$ -VR, würde analog gelten:

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{Q}^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

(als $\mathbb{Q}$ -VR, also erst recht als Menge).

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, würde hieraus folgen, dass auch $\mathbb{R}$ abzählbar ist $\Downarrow$ (Bsp. 1.25 (e))

4 | Grenzen des Wachstums ★

Eine *Fahne der Länge d* in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$. (Die Notation $A \subsetneq B$ bedeutet $A \subseteq B$ aber $A \neq B$). Zeigen Sie, dass für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V ist.

Maximale Länge $\geq \dim V$:

Sei $(v_1, \dots, v_d)$ eine Basis von V , also $d = \dim V$.

Betrachte

$$U_0 := \langle () \rangle = \{0\}$$

$$U_1 := \langle v_1 \rangle$$

$$U_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$$

$\vdots$

$$U_d := \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$$

Dann ist jeweils $U_i \subsetneq U_{i+1}$, aber $U_i \neq U_{i+1}$.

(Mögliche Argumente für $U_i \neq U_{i+1}$ z.B.:

- $v_{i+1} \in U_{i+1}$ aber $v_{i+1} \notin U_i$
- jeweils $(v_1, \dots, v_i)$ Basis von U_i ,
also $\dim U_i = i$; insbes. $\dim U_i \neq \dim U_{i+1}$.)

Also def. $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$ Fahne der Länge $d = \dim V$.

Maximale Länge $\leq \dim V$:

Sei $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$ Fahne maximaler Länge.

Da jeweils $U_i \subsetneq U_{i+1}$, ist $\dim U_i < \dim U_{i+1}$

(Dimensionsformel 5.14 (a)), also $\dim U_i + 1 \leq \dim U_{i+1}$

Insgesamt folgt:

$$\dim U_0 + d \leq \dim U_d$$

Andererseits ist $0 \leq \dim U_0$ und $\dim U_d \leq \dim V$.

Also folgt: $d \leq \dim V$

Für jede Fahne $U_0 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$

