

1 | Suchbild (10 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$ -linear?

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu den $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen jeweils die Dimension des Kerns und des Bildes, indem Sie eine explizite Basis von Kern und Bild angeben. (Sie sollten natürlich auch nachweisen, dass die von Ihnen angegebenen Tupel tatsächlich Basen sind.)

f linear:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y+y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \\ f\left(s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ sy \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = s \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

[Alternativ:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ also } f \text{ linear nach Satz 6.3}]$$

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ also}$$

$$\dim(\ker(f)) = 1.$$

einzelner Vektor $\neq 0$
ist linear unabhängig

$$\operatorname{im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ also}$$

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = 1.$$

g linear:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+x'+y' \\ x+y+x'+y' \\ x+y+x'+y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'+y' \\ x'+y' \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

$$g\left(s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} sx+sx \\ sx+sx \\ sx+sx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot (x+y) \\ s \cdot (x+y) \\ s \cdot (x+y) \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} = s \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

[Alternativ: $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \text{ also}$$

einzelner Vektor $\neq \underline{0}$
ist linear unabhängig

$$\dim(\ker(g)) = 1.$$

$$\operatorname{im}(g) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Basis } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ also}$$

einzelner Vektor $\neq \underline{0}$
ist linear unabhängig

$$\dim(\operatorname{im}(g)) = 1.$$

h ist nicht linear: $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

f ist linear:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+x') - (y+y') \\ 3(y+y') \\ (x+x') + 2(y+y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x-y + 2x'-y' \\ 3y + 3y' \\ x+2y + x'+2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'-y' \\ 3y' \\ x'+2y' \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2sx - sy \\ 3sy \\ sx + 2sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot (2x - y) \\ s \cdot 3y \\ s \cdot (x + 2y) \end{pmatrix} \\ &= s \cdot \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \\ x + 2y \end{pmatrix} = s \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

[Alternativ: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \wedge \underline{3y = 0} \wedge x + 2y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 0 \wedge x = 0 \right\} \\ &= \{ \underline{0} \} \quad \text{hat Basis } () \quad (\text{leeres Tupel}) \end{aligned}$$

also $\dim(\ker(f)) = 0$.

$$\operatorname{im}(f) = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, denn

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ist linear unabhängig:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2s_1 - s_2 \\ 3s_2 \\ s_1 + 2s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_2 = 0 \wedge s_1 = 0.$$

[Alternativ: $\dim(\text{im}(f)) = 2 - 0 = 2$
nach Rangsatz, also
ist jedes Erzeugendensystem mit 2 Elementen
eine Basis]

Daher: $\dim(\text{im}(f)) = 2.$

2 | Spielverderber (10 Punkte)

In einem reellen Vektorraum seien Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ gegeben. Ferner seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &:= 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_2 &:= \quad \quad - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_3 &:= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 &:= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_5 &:= \mathbf{u}_1 \quad \quad \quad - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4\end{aligned}$$

Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$ linear unabhängig?

Nein — $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ sind linear unabhängig.

Alternative A:

Angenommen, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ sind linear unabhängig.
Dann ist $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \rangle) = 5$.

Andererseits ist $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \rangle \subseteq \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4 \rangle$
und somit $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \rangle) \leq \dim(\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4 \rangle)$
 ≤ 4
 $\uparrow$ Basisauswahlsatz

Alternative B:

$$\begin{aligned}& 2 \cdot \mathbf{v}_1 + 4 \cdot \mathbf{v}_2 - 5 \cdot \mathbf{v}_3 + 5 \cdot \mathbf{v}_4 - 4 \cdot \mathbf{v}_5 \\&= (2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \mathbf{u}_1 \\&\quad + (2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0) \mathbf{u}_2 \\&\quad + (2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0) \mathbf{u}_3 \\&\quad + (2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \mathbf{u}_4 \\&= 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 + 0 \cdot \mathbf{u}_4 \\&= \underline{0}\end{aligned}$$

3 | Zweikammersystem ★

Zeigen Sie, dass für Teilmengen A_1, A_2 einer Menge M und Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V gilt:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A_1 \cup A_2 \cong A_1 \sqcup A_2$$

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} \quad \Rightarrow \quad U_1 + U_2 \cong U_1 \oplus U_2$$

Weisen Sie ferner durch geeignete Gegenbeispiele nach, dass die Annahmen jeweils notwendig sind!

Definiere $f: A_1 \sqcup A_2 \longrightarrow A_1 \cup A_2$.

$$(a, i) \longmapsto a$$

f surjektiv. Für jedes $a \in A_1 \cup A_2$ gilt:

$$a \in A_1 \text{ oder } a \in A_2.$$

Also hat a Urbild $(a, 1)$ oder $(a, 2)$.

f injektiv falls $A_1 \cap A_2 = \emptyset$:

$$\text{Ist } f(a, i) = f(a', i'), \text{ so ist } a = a'.$$

Nach Annahme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gibt es höchstens ein $j \in \{1, 2\}$ mit $a \in A_j$.

Also ist notw. $i = j = i'$.

$$\text{Also } (a, i) = (a', i').$$

Ohne die Annahme $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ist i. A.

$A_1 \sqcup A_2 \not\cong A_1 \cup A_2$, z.B. gilt für $A_1 = \{*\} = A_2$:

$$|A_1 \sqcup A_2| = 2 \neq 1 = |A_1 \cup A_2|$$

Definiere $f: \underbrace{U_1 \oplus U_2}_{(u_1, u_2)} \longrightarrow \underbrace{U_1 + U_2}_{\{u_1 + u_2\}}$
 $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$

f surjektiv: Nach Notiz 4.11 ist jeder Vektor in $U_1 + U_2$ von der Form $u_1 + u_2$ für ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_2 \in U_2$. Somit ist (u_1, u_2) ein Urbild von $u_1 + u_2$.

f injektiv, falls $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$:

Nach Injektivitätskriterium 4.17 reicht es zu zeigen: $f(u_1, u_2) = \underline{0} \Rightarrow (u_1, u_2) = (\underline{0}, \underline{0})$.

Sei also $(u_1, u_2) \in U_1 \oplus U_2$ derart, dass

$$f(u_1, u_2) = \underline{0}.$$

Dann ist $u_2 = -u_1$, und daher $u_2 \in U_1$.

Somit $u_2 \in U_1 \cap U_2$, also nach Annahme

$$u_2 = \underline{0}.$$

Es folgt $u_1 = -u_2 = \underline{0}$,

also $(u_1, u_2) = (\underline{0}, \underline{0})$.

Ohne die Annahme $U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$ ist i.A. $U_1 \oplus U_2 \neq U_1 + U_2$.

Zum Beispiel gilt für $U_1 = \mathbb{R} = U_2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \oplus U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$$

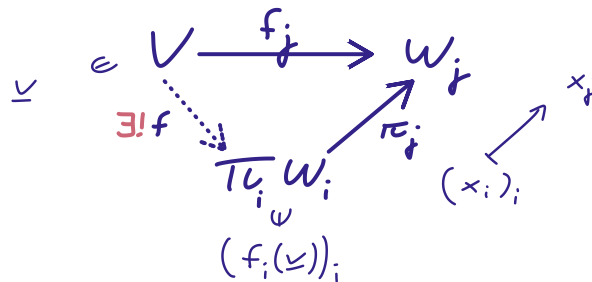
Somit $U_1 \oplus U_2 \neq U_1 + U_2$ nach Dimensionssatz.

4 | Warum summarum? ★

Seien V und W , und ferner V_i und W_i für jedes i aus einer Indexmenge I , K -Vektorräume. Seien $\iota_j: V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$ und $\pi_j: \prod_{i \in I} W_i \rightarrow W_j$ die kanonischen Inklusionen und Projektionen aus Notiz 4.20.

- Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K -linearer Abbildungen $f_i: V \rightarrow W_i$ ($i \in I$) genau eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow \prod_{i \in I} W_i$ existiert mit $\pi_j \circ f = f_j$ für jedes $j \in I$.
- Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K -linearer Abbildungen $f_i: V_i \rightarrow W$ ($i \in I$) genau eine K -lineare Abbildung $f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ existiert mit $f \circ \iota_j = f_j$ für jedes $j \in I$.
- Bleibt die Aussagen in (a) richtig, wenn wir das Produkt durch die Summe ersetzen?
- Bleibt die Aussagen in (b) richtig, wenn wir die Summe durch das Produkt ersetzen?

a:



Es kann höchstens eine solche Abb. f existieren, denn die Bedingung

$$(*) \quad \pi_j \circ f = f_j \quad \forall j$$

legt für jedes $v \in V$ jede Koordinate von $f(v)$ fest:

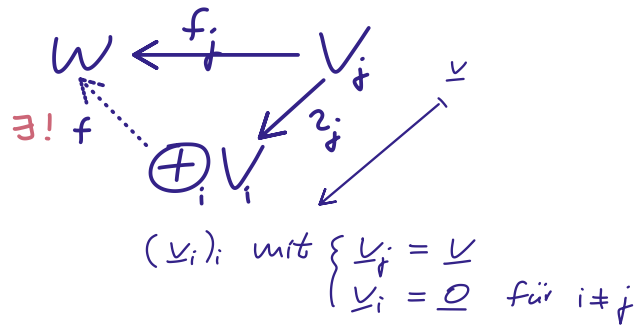
$$\begin{aligned} f(v)_i &= \pi_i(f(v)) \\ &= (\pi_i \circ f)(v) \\ &\stackrel{(*)}{=} f_i(v) \end{aligned}$$

Falls f existiert, ist f also notwendig durch

$$(+1) \quad v \mapsto (f_i(v))_i$$

gegeben. Andererseits definiert (+1) tatsächlich eine K -lineare Abb. [...].

b:



Es kann höchstens eine solche Abb. f existieren:

- Die Bedingung

$$(*) \quad f \circ z_j = f_j \quad \forall j$$

legt f eindeutig auf allen Vektoren der Form $z_j(v)$ fest:

$$(**) \quad f(z_j(v)) = (f \circ z_j)(v) \stackrel{(*)}{=} f_j(v).$$

- Jeder Vektor aus $\bigoplus_i V_i$ ist eine Linearkombination von Vektoren der Form $z_j(v)$, also von der Form $\sum_{\text{endlich}} a_j z_j(v)$ für gewisse $a_j \in K$. Da f linear ist, ist f durch $(**)$ auf allen Vektoren eindeutig festgelegt:

$$f\left(\sum_{\text{endlich}} a_j z_j(v)\right) = \sum_{\text{endlich}} a_j f(z_j(v)) \stackrel{(**)}{=} \sum_{\text{endlich}} a_j f_j(v).$$

Andererseits wird durch

$$(\dagger) \quad (v_i)_i \mapsto \sum_i f_i(v_i)$$

↑
nur endlich viele
Koordinaten v_i
sind $\neq 0$

↑ Da f_i linear,
sind nur endlich
viele Summanden
 $f_i(v_i) \neq 0$.

eine Abb. definiert, die die gesuchte Eigenschaft erfüllt, und diese ist K -linear [...].

c: Aussage (a) bleibt nicht richtig, wenn wir Π durch $\bigoplus$ ersetzen – Existenz von f scheitert:

Wähle z.B. $I = \mathbb{N}$, $V = W_i = \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}$,
 $f_i := \text{id}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Die Abb. f müsste $1 \in V$ abbilden auf ein Tupel in $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$, dessen jede Koordinate gleich 1 ist. Aber ein solches Tupel gibt es nicht in $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$.

d: Aussage (b) bleibt nicht richtig, wenn wir $\oplus$ durch Π ersetzen – Eindeutigkeit von f scheitert:

Wähle I, V, W_i, f_i wie in (c).

Durch die in (b) angegebene Bedingung ist

$$f: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Unterraum $\oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \subseteq \Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$

eindeutig festgelegt – für die Standardbasis $(\underline{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ muss gelten $f(\underline{e}_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ergänze die Standardbasis mittels Basisergänzungssatz zu einer Basis $(\underline{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \underline{v}_i (i \in I)$ von $\Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

Da $\oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \neq \Pi_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$, gibt es mindestens einen ergänzten Basisvektor $\underline{v}_{i_0}$.

Definiere $\mathbb{R}$ -lineare Abb.

$$f_1: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{array}{ll} \underline{e}_n & \mapsto 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \underline{v}_i & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = i_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array},$$

und

$$f_2: \Pi_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{array}{ll} \underline{e}_n & \mapsto 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ \underline{v}_i & \mapsto 0 \quad (\forall i \in I) \end{array}$$

Dann erfüllen sowohl f_1 als auch f_2 die in (b) geforderte Eigenschaft: