Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Tariq Syed

Wintersemester 2025/26
05.12.2025

Lineare Algebra I
Blatt 8

1 | Suchbild

Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} \qquad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu den $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen jeweils die Dimension des Kerns und des Bildes, indem Sie eine explizite Basis von Kern und Bild angeben. *(Sie sollten natürlich auch nachweisen, dass die von Ihnen angegebenen Tupel tatsächlich Basen sind.)*

2 | Spielverderber

In einem reellen Vektorraum seien Vektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ gegeben. Ferner seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
\mathbf{v}_1 & := & 2\mathbf{u}_1 & + & 2\mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_2 & := & & - & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_3 & := & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & + & 3\mathbf{u}_3 & - & \mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_4 & := & \mathbf{u}_1 & + & \mathbf{u}_2 & + & \mathbf{u}_3 & + & \mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_5 & := & \mathbf{u}_1 & & & - & \mathbf{u}_3 & + & \mathbf{u}_4
\end{array}$$

Ist das Tupel $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$ linear unabhängig? *(Sie können diese Aufgabe entweder durch eine explizite Rechnung lösen oder durch Anwenden der Sätze der Vorlesung. Eine Lösung reicht.)*

3 | Zweikammersystem ★

Zeigen Sie, dass für Teilmengen A_1, A_2 einer Menge M und Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V gilt:

$$\begin{array}{lcl}
A_1 \cap A_2 = \emptyset & \Rightarrow & A_1 \cup A_2 \cong A_1 \sqcup A_2 \\
U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\} & \Rightarrow & U_1 + U_2 \cong U_1 \oplus U_2
\end{array}$$

Weisen Sie ferner durch geeignete Gegenbeispiele nach, dass die Annahmen jeweils notwendig sind!

4 | Warum summarum? ★

Seien V und W, und ferner V_i und W_i für jedes i aus einer Indexmenge I, K-Vektorräume. Seien $\iota_j\colon V_j \hookrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} V_i$ und $\pi_j\colon \prod\limits_{i \in I} W_i \twoheadrightarrow W_j$ die kanonischen Inklusionen und Projektionen aus Notiz 4.20.

(a) Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K-linearer Abbildungen $f_i\colon V \to W_i$ $(i \in I)$ genau eine K-lineare Abbildung $f\colon V \to \prod_{i \in I} W_i$ existiert mit $\pi_j \circ f = f_j$ für jedes $j \in I$.

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Familie K-linearer Abbildungen $f_i\colon V_i \to W$ $(i \in I)$ genau eine K-lineare Abbildung $f\colon \bigoplus_{i \in I} V_i \to W$ existiert mit $f \circ \iota_j = f_j$ für jedes $j \in I$.

(c) Bleibt die Aussagen in (a) richtig, wenn wir das Produkt durch die Summe ersetzen?

(d) Bleibt die Aussagen in (b) richtig, wenn wir die Summe durch das Produkt ersetzen?

Abgabefrist: 15.12.2025, 10:15 Uhr.