

1 | Verpackungswahn

Seien V und W K -Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subseteq W$ Teilmengen, und sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

✓ K -VR, $M \subseteq V$
Menge

Def.: $\langle M \rangle := \{ \text{Linearkomb. von Vektoren aus } M \}$
 $= \{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in K, v_i \in M \}$

Satz: $\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR von V ,
der M enthält.

(a) $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$

Allgemeiner gilt für jeden UVR U von V :
 $\langle U \rangle = U$.

(Das folgt aus der Charakt. von $\langle U \rangle$ als
kleinstem UVR, der U enthält.)

Da $\langle M \rangle$ für beliebige Mengen M ein UVR
ist, gilt also insbes. $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$.

(b) $\langle M \cap N \rangle = \langle M \rangle \cap \langle N \rangle$ falsch.

Gegenbeispiel z. B.: $V = \mathbb{R}$, $M = \{1\}$, $N = \{2\}$.



$\langle M \rangle = \langle N \rangle = \mathbb{R}$, also $\langle M \rangle \cap \langle N \rangle = \mathbb{R}$ aber
 $\langle M \cap N \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

(c) $\langle f(M) \rangle = f(\langle M \rangle)$

($\subseteq$) Sei $v \in \langle f(M) \rangle$. Dann ist

$$v = \sum_{i=1}^n s_i \cdot f(v_i) \quad \text{für gewisse } v_i \in M, s_i \in K$$

$$\stackrel{f \text{ linear}}{=} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n s_i v_i}_{\in \langle M \rangle}\right)$$

$$\in f(\langle M \rangle)$$

($\supseteq$) Sei $v \in f(\langle M \rangle)$. Dann ist

$$v = f\left(\sum_{i=1}^n s_i v_i\right) \quad \text{für gewisse } v_i \in M, s_i \in K$$

$$\stackrel{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n s_i \cdot \underbrace{f(v_i)}_{\in f(M)}$$

$$\in \langle f(M) \rangle.$$

(d) $\langle f^{-1}(O) \rangle = f^{-1}(\langle O \rangle)$ falsch

Gegenbeispiel z.B. $V = \mathbb{R}, W = \{0\}, O = \emptyset$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}$$

$$x \mapsto 0$$

$$\langle f^{-1}(\emptyset) \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \neq \{0\}$$

2 | Päckchen

Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

(a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

linear unabhängig:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{lclcl} \text{und} & a \cdot 1 & + & b \cdot 0 & = & 0 \\ \text{und} & a \cdot 1 & + & b \cdot 2 & = & 0 \\ \text{und} & a \cdot 1 & + & b \cdot (-2) & = & 0, \end{array}$$

also:

$$\begin{array}{lclcl} & a & = & 0 & \textcircled{1} \\ \text{und} & a & + & 2b & = & 0 & \textcircled{2} \\ \text{und} & a & - & 2b & = & 0, & \textcircled{3} \end{array}$$

① eingesetzt in ② liefert:

$$2b = 0,$$

also folgt $b = 0$.

Also $a = b = 0$.

Kein Erzeugendensystem:

Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

hat die Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{für gewisse } a, b \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ a + 2b \\ a - 2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und erfüllt somit $x + y + z = 3x$.

Also ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

linear unabhängig:

$$\text{Aus } a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $a=0$ und $2b=0$ und $3c=0$,
also $a=b=c=0$.

Erzeugendensystem:

Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich
schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

linear unabhängig:

$$\text{Sei } a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt:

$$\begin{array}{rclcl} a - b & = & 0 & \textcircled{1} \\ \text{und } a + 2c & = & 0 & \textcircled{2} \\ \text{und } a - 2c & = & 0 & \textcircled{3} \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{rclcl} a = b & & \textcircled{1} \\ \text{und } 2a = 0 & & \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ \text{und } 4c = 0 & & \textcircled{2} - \textcircled{3} \end{array}$$

Daraus folgt: $a=0$ und $b=0$ und $c=0$.

Erzeugendensystem:

festes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+z) - \frac{1}{2}(y+z) + x \\ \frac{1}{2}(y+z) + \frac{3}{4}(y-z) \\ \frac{1}{2}(y+z) - \frac{3}{4}(y-z) \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}(y+z)}_a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(y+z) - x\right)}_b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{4}(y-z)}_c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wie man diese Lösung findet:

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

& nach a, b, c lösen.

Aus dem Ansatz folgt:

$$a - b = x \quad (1)$$

$$a + 2c = y \quad (2)$$

$$a - 2c = z \quad (3)$$

Daraus folgt:

$$a - b = x \quad (1)$$

$$2a = y + z \quad (2) + (3)$$

$$4c = y - z \quad (2) - (3)$$

Also erhalten wir:

$$a = \frac{1}{2}(y+z)$$

$$b = a - x = \frac{1}{2}(y+z) - x$$

$$c = \frac{1}{4}(y-z)$$



Der Ansatz und die nachfolgende Rechnung garantieren nicht, dass wir eine Lösung gefunden haben. Es bedarf dazu der grün umrahmten Probe.

Zum Beispiel könnten wir auch in Aufgabenteil (a) einsetzen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix}$$

und folgern

$$a = x$$

$$b = \frac{1}{z}(y - a),$$

aber das ist keine Lösung!

(d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ nicht linear unabhängig,
z.B.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erzeugendensystem, da bereits $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Erzeugendensystem ist (Teil (b)).

(e) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{y \in \mathbb{R}}$ nicht linear unabhängig,
z.B. 1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

kein Erzeugendensystem: Für jeden Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_y \right\rangle$

ist $a = 0$, daher z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_y \right\rangle$