Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Tariq Syed

Wintersemester 2025/26
28.11.2025

Lineare Algebra I
Blatt 7

---

1 | Verpackungswahn

Seien V und W K-Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subseteq W$ Teilmengen, und sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$

(b) $\langle M \cap N\rangle = \langle M\rangle \cap \langle N\rangle$

(c) $\langle f(M)\rangle = f(\langle M\rangle)$

(d) $\langle f^{-1}(O)\rangle = f^{-1}(\langle O\rangle)$

2 | Päckchen

Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

(a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

(e) $\left(\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\right)_{y\in\mathbb{R}}$

3 | Auf und Ab ★

Die *formale Ableitung* eines Polynoms $A = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ ist gegeben durch $\partial A := \sum_{i\geqslant 1} i a_i X^{i-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $A \mapsto \partial A$ einen Endomorphismus auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ definiert.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild dieses Endomorphismus.

4 | Kreuzschlitz ★

Sei V ein Vektorraum mit Untervektorräumen W, V_1, V_2. Ist $W \subseteq V_1 \cup V_2$, so folgt bereits $W \subseteq V_1$ oder $W \subseteq V_2$.

Abgabefrist: 08.12.2025, 10:15 Uhr.