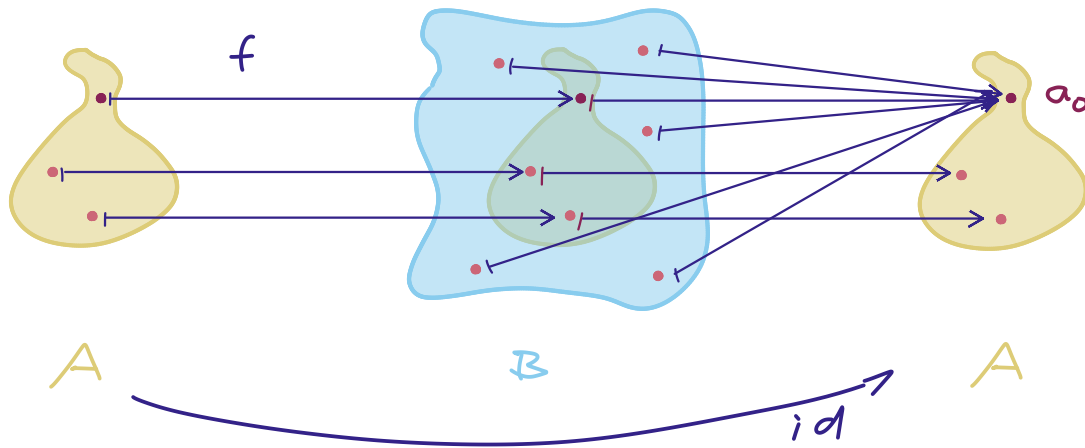


1 | Linkskringelnd

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ mit nicht-leerem Definitionsbereich A ist genau dann injektiv, wenn sie ein Linksinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $g \circ f = \text{id}_A$.



Sei $A \neq \emptyset$.

($\Rightarrow$) Wähle ein $a_0 \in A$.

Definiere $g: B \longrightarrow A$

$$b \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } b = f(a) \\ a_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

g ist wohldefiniert, da f injektiv ist:
für jedes $b \in B$ gibt es höchstens ein
 $a \in A$ mit $b = f(a)$.

Für dieses g gilt per Konstruktion

$$g(f(a)) = a, \\ \text{also } g \circ f = \text{id}.$$

($\Leftarrow$) Sei g mit $g \circ f = \text{id}$ gegeben.

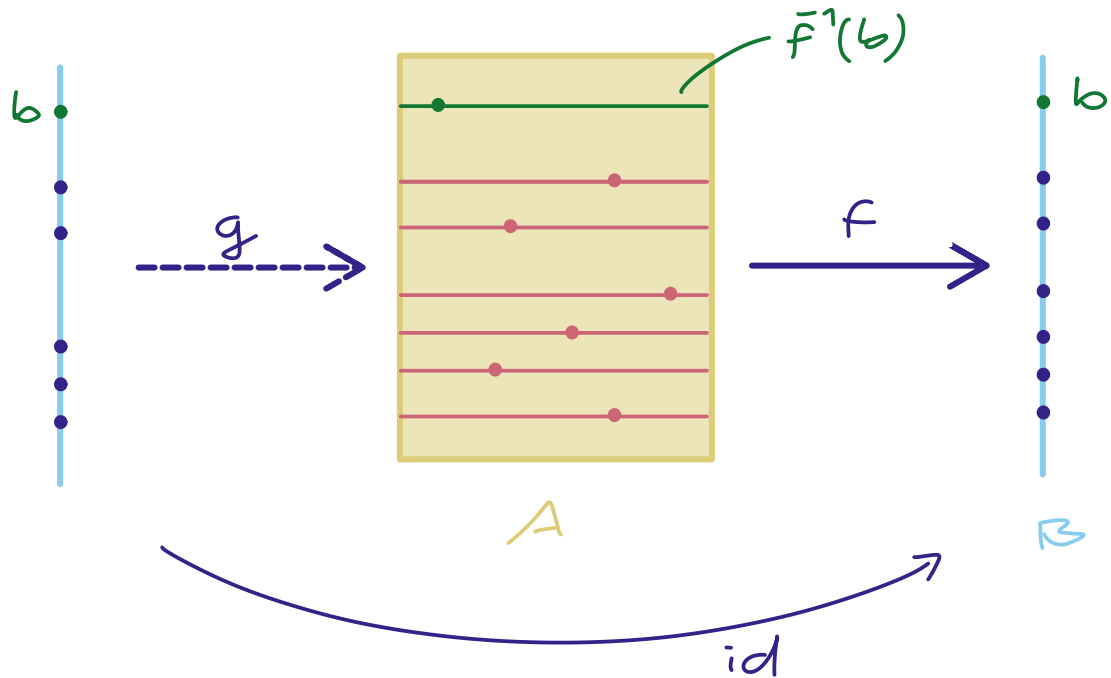
Seien $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$.

z.z.: $a = a'$.

Aus $f(a) = f(a')$ folgt

$$\underbrace{g(f(a))}_a = \underbrace{g(f(a'))}_{a'}, \text{ also}$$

- (b) Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist genau dann surjektiv, wenn sie ein Rechtsinverses besitzt, wenn es also eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ gibt, für die gilt $f \circ g = \text{id}_B$.



($\Rightarrow$) Sei $f: A \rightarrow B$ surjektiv.

Dann ist für jedes $b \in B$ die Faser $f^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Wir können also für jedes $b \in B$ ein Element $a_b \in f^{-1}(b)$ wählen [Auswahlaxiom].

Definiere $g: B \rightarrow A$
 $b \mapsto a_b$

Dann gilt für jedes $b \in B$:

$$f(\underbrace{g(b)}_{\in f^{-1}(b)}) = b, \text{ also } f \circ g = \text{id}.$$

($\Leftarrow$) Sei g gegeben mit $f \circ g = \text{id}$.

Sei $b \in B$ beliebig.

z.z.: $\exists a \in A : f(a) = b$.

Wähle $a := g(b)$. Dann ist

$$f(a) = f(g(b)) = \text{id}(b) = b.$$

□

2 | Gleichmacherei

Untenstehend sind einige Relationen auf $\mathbb{Z}$ angegeben. Welche sind symmetrisch? Welche reflexiv? Welche transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen, und was sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

(a) $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$

symmetrisch ✓ (denn $x \cdot y = y \cdot x$ in $\mathbb{Z}$)

reflexiv ✓ (denn $x^2 \geq 0$ in $\mathbb{Z}$)

nicht transitiv, z.B. $1 \sim 0$ und $0 \sim -1$
aber $1 \not\sim -1$.

(b) $x \sim y :\Leftrightarrow xy > 0$

symmetrisch ✓ (denn $x \cdot y = y \cdot x$ in $\mathbb{Z}$)

nicht reflexiv, denn $0 \not\sim 0$.

transitiv ✓ : $x \sim y$ und $y \sim z$

$$\Rightarrow xy > 0 \quad \text{und} \quad yz > 0$$

$$\Rightarrow xy^2z > 0$$

Insbesondere ist also $y \neq 0$,
somit $y^2 > 0$, und es folgt
 $xz > 0$, also
 $x \sim z$.

(c) $x \sim y :\Leftrightarrow x + y \geq 0$

symmetrisch ✓ (denn $x + y = y + x$ in $\mathbb{Z}$)

nicht reflexiv, z.B. $-1 \not\sim -1$.

nicht transitiv, z.B. $-1 \sim 1$ und $1 \sim -1$,
aber $-1 \not\sim -1$.

(d) $x \sim y :\Leftrightarrow x^3 = y^3$

Das ist die Relation $\sim_f$ zu $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $x \mapsto x^3$,
also Äquivalenzrelation.

Da 3. Wurzeln eindeutig sind bzw. da f injektiv ist, gilt sogar $x \sim y \Leftrightarrow x = y$.
Also ist $[x] = \{x\} \subseteq \mathbb{Z}$.

(e) $x \sim y \Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$

Das ist die Relation $\sim_f$ zu $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto (x-2)^2$
 also Äquivalenzrelation.

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x-2 = y-2 \quad \text{oder} \quad x-2 = -(y-2) \\ &\Leftrightarrow x = y \quad \text{oder} \quad y = 4-x \end{aligned}$$

Also

$$[x] = \{x, 4-x\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

(f) $x \sim y \Leftrightarrow 5 \text{ teilt } x - y$

Äquivalenzrelation $\sim_f$ zu $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
 $x \mapsto [x]$

(Beispiel 2.22)

$$[x] = \{y \mid y \text{ hat denselben Rest modulo } 5 \text{ wie } x\}$$

(g) $x \sim y \Leftrightarrow x \text{ teilt } y$

nicht symmetrisch, z.B. $2 \sim 4$ aber $4 \not\sim 2$

reflexiv ✓

transitiv: $x \sim y$ und $y \sim z$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y = k \cdot x$$

$$\text{und } \exists l \in \mathbb{Z}: z = l \cdot y$$

$$\text{Also ist } z = (l \cdot k) \cdot x, \text{ d.h. } x \sim z.$$

4 | Eintopf ★

Zeigen Sie, dass Isomorphie von Mengen eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{E}$ aller *endlichen* Mengen definiert. Können Sie den Quotienten $\mathcal{E}/\cong$ mit einer Ihnen bekannten Menge identifizieren?

symmetrisch: $X \cong Y$ via f , dann $Y \cong X$ via f^{-1}

reflexiv: $X \cong X$ via id

transitiv: $X \cong Y$ via $f \wedge Y \cong Z$ via g ,
dann $X \cong Z$ via $g \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} / \cong & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{N}_0 \\ [X] & \mapsto & |X| \\ [\{1, \dots, n\}] & \longleftarrow & n \end{array}$$