

1 | Dienst nach Vorschrift

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Welche der wohldefinierten Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

(a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

wohldefiniert ✓

nicht injektiv, z.B. $(-1)^2 = 1^2$

nicht surjektiv, denn $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
also hat z.B. -1 kein Urbild

(b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$

wohldefiniert ✓

bijektiv mit Umkehrabb.: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

(c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x^2 \mapsto x$

nicht wohldefiniert:

wird $9 = 3^2 = (-3)^2$

abgebildet auf 3 oder auf -3?

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

wohldefiniert ✓

(Für eine nicht-negative reelle Zahl x bezeichnet das Symbol $\sqrt{x}$ die nicht-negative Wurzel von x .)

injektiv?

Gilt für $x, y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y},$$

so folgt

$$x = (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2 = y.$$

surjektiv?

Es ist stets $\sqrt{x} \geq 0$, also hat

z.B. -1 kein Urbild.

f:

$$(e) \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{b} \mapsto \frac{b}{a}$$

"x"

wohldefiniert:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a/b},$$

d.h. wir können die Abb.-Vorschrift auch schreiben als $x \mapsto \frac{1}{x}$.

bijektiv: Abbildung ist ihre eigene Umkehrabb. ($f \circ f = \text{id}$)

$$(f) \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

wohldefiniert

($n-1$ liegt für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ auch wieder in $\mathbb{N}$)

bijektiv: Abbildung ist ihre eigene Umkehrabb.

$$(g) \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

Anzahl der
verschiedenen
Primfaktoren von n

wohldefiniert ✓

nicht injektiv z.B. $6 \mapsto 2$
 $22 \mapsto 2$
z.B. $2 \mapsto 1$
 $3 \mapsto 1$

surjektiv: Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen, sagen wir $p_1, p_2, p_3, \dots$

$0 \in \mathbb{N}_0$ hat als Urbild 1

$$(1 \mapsto 0),$$

und jedes andere $n \in \mathbb{N}_0$ hat als Urbild $p_1 \dots p_n$ (d.h. $p_1 \dots p_n \mapsto n$).

$$\prod_{i=1}^n p_i \mapsto n$$

2 | Schnittbild

Das Bilden von Urbildern vertauscht mit Vereinigungen und Schnitten: für beliebige Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und beliebige Familien von Teilmengen $N_i \subseteq N$ gilt

$$(a) f^{-1}(\bigcup_{i \in I} N_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(N_i) \quad \text{und} \quad (b) f^{-1}(\bigcap_{i \in I} N_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(N_i).$$

$$a: x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} N_i\right) \stackrel{\text{Def. Urbild}}{\iff} f(x) \in \bigcup_{i \in I} N_i$$

$$\stackrel{\bigcup}{\iff} \exists i \in I: f(x) \in N_i$$

$$\stackrel{\text{Def. Urbild}}{\iff} \exists i \in I: x \in f^{-1}(N_i)$$

$$\stackrel{\bigcup}{\iff} x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(N_i)$$

$$b: x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} N_i\right) \stackrel{\text{Def. Urbild}}{\iff} f(x) \in \bigcap_{i \in I} N_i$$

$$\stackrel{\bigcap}{\iff} \forall i \in I: f(x) \in N_i$$

$$\stackrel{\text{Def. Urbild}}{\iff} \forall i \in I: x \in f^{-1}(N_i)$$

$$\stackrel{\bigcap}{\iff} x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(N_i)$$

(c) Wie sieht es mit Bildern aus? Gilt auch $f(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$?

$$c: y \in f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) \stackrel{\text{Def. Bild}}{\iff} \exists x \in \bigcup_{i \in I} M_i: f(x) = y$$

$$\stackrel{\bigcup}{\iff} \exists i \in I: \exists x \in M_i: f(x) = y$$

$$\stackrel{\text{Def. Bild}}{\iff} \exists i \in I: y \in f(M_i)$$

$$\stackrel{\bigcup}{\iff} y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i)$$

(d) Gilt $f(\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} f(M_i)$?

a: *Nein.* z.B. $I = \{1, 2\}$. $M = \{1, 2\}$, $N = \{1\}$

$$M_1 = \{1\}$$

$$M_2 = \{2\}$$

$$f: \{1, 2\} \longrightarrow \{1\}$$
$$x \longmapsto 1$$

Dann ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, also $f(M_1 \cap M_2) = \emptyset$,
aber $f(M_1) \cap f(M_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$.

3 | Binomis Baukasten ★

Sei M eine endliche Menge mit n Elementen.

(a) Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist wieder endlich. Aus wie vielen Elementen besteht sie?

Beh: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Hat eine endliche Menge n Elemente,
so hat ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

Beweis mittels Induktion:

Induktionsanfang: Ist $|M| = 0$, so ist $M = \emptyset$,
also $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$, also ist
 $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$.

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n.$$

Sei nun M mit $|M| = n+1$ gegeben.

Sei dazu $m_0 \in M$ beliebig. Dann ist

$$|M \setminus \{m_0\}| = n.$$

Eine Teilmenge von M enthält entweder m_0
oder nicht. Enthält sie nicht m_0 , liegt
sie bereits in $\mathcal{P}(M \setminus \{m_0\})$.

Enthält sie m_0 , so ist von der Form
 $N \cup \{m_0\}$ für ein $N \in \mathcal{P}(M \setminus \{m_0\})$.

Deshalb gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(M \setminus \{m_0\})| + |\mathcal{P}(M \setminus \{m_0\})|$$

Also folgt nach Induktionsv.r.:

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(M)| &= 2^n + 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$



Alternativer Beweis: Um eine Teilmenge N von M anzugeben, müssen wir für jedes Element von M angeben, ob es in N liegt oder nicht. Dafür gibt es 2^n Möglichkeiten. $\square$

- (b) Ist M nicht leer, so sind die Menge $\mathfrak{P}^0(M) \subset \mathfrak{P}(M)$ der Teilmengen, die aus einer geraden Anzahl von Elementen bestehen, und die Menge $\mathfrak{P}^1(M)$ der Teilmengen, die aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehen, gleich mächtig (d.h., es gibt eine Bijektion $\mathfrak{P}^0(M) \cong \mathfrak{P}^1(M)$).

Wähle $m_0 \in M$ ($M \neq \emptyset$ nach Annahme).

Def. $f: \mathfrak{P}^0(M) \longrightarrow \mathfrak{P}^1(M)$

$$N \longmapsto \begin{cases} N \setminus \{m_0\} & \text{falls } m_0 \in N \\ N \cup \{m_0\} & \text{falls } m_0 \notin N \end{cases}$$

$g: \mathfrak{P}^1(M) \longrightarrow \mathfrak{P}^0(M)$

$$N \longmapsto \begin{cases} N \setminus \{m_0\} & \text{falls } m_0 \in N \\ N \cup \{m_0\} & \text{falls } m_0 \notin N \end{cases}$$

Offenbar $f \circ g = \text{id}$ und $g \circ f = \text{id}$, also sind dies zueinander inverse Bijektionen.

- (c) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Aus dem vorherigen Aufgabenteil folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Def.} & | \mathfrak{P}^0(M) | & \stackrel{(b)}{=} | \mathfrak{P}^1(M) | \\ \binom{n}{k} & \xrightarrow{\parallel} & \xrightarrow{\parallel} \\ & \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} & \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k} \\ & \parallel & \parallel \\ & \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ gerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} & - \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ ungerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ gerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ ungerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} - \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ ungerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \text{ ungerade}}} (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

4 | Machtdemonstration ★

Die Potenzmenge einer Menge ist stets mächtiger als die Menge selbst: für jede Menge M existiert eine injektive Abbildung $M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, aber für keine Menge M existiert eine solche Abbildung, die bijektiv ist.

injektive Abb.:
$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{P}(M) \\ m & \longmapsto & \{m\} \end{array}$$

ist injektiv, denn $\{u\} = \{m\} \Rightarrow u = m.$

⚡ Keine surjektive Abb.:

Beweis durch Widerspruch.

Sei $g: M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ surjektiv.

Betrachte

$$M' := \{m \in M \mid m \notin g(m)\}$$

Nach Annahme $\exists m'$ mit $g(m') = M'$.

Falls $m' \in M'$ gilt $m' \in g(m')$, also $m' \notin M'$ nach Def. von M' ⚡

Falls $m' \notin M'$ gilt $m' \notin g(m')$, also $m' \in M'$ nach Def. von M' ⚡

□