

1 | Tertium non datur

Ein Grundprinzip der klassischen Logik besagt: für jede beliebige Aussage X gilt genau einer der Aussagen X (die Aussage selbst) und $\neg X$ (die Negation der Aussage). Formulieren Sie jeweils die Negation der folgenden Aussagen:

(a) Grün ja grün sind alle meine Kleider. [Volkslied] = X

$$X = \forall K: K \text{ ist grün.}$$

$$\neg X = \neg (\forall K: K \text{ ist grün.})$$

$$= \exists K: \neg (K \text{ ist grün})$$

$\neg X$: Ich habe (mindestens) ein Kleid, das nicht grün ist.

(b) Sie können an der Veranstaltung teilnehmen, wenn Sie geimpft, getestet oder genesen sind.

$$X = (G_1 \vee G_2 \vee G_3 \Rightarrow \text{Teilnahme möglich})$$

$$\neg X = \neg (G_1 \vee G_2 \vee G_3 \Rightarrow \text{Teilnahme möglich})$$

$$= \neg (A \Rightarrow B)$$

$$= \neg (\neg A \vee B)$$

$$= \neg(\neg A) \wedge \neg B$$

$$= A \wedge \neg B$$

$$= (G_1 \vee G_2 \vee G_3) \wedge \neg B$$

$\neg X$: Sie sind geimpft oder getestet oder genesen und dürfen (trotzdem) nicht an der Veranstaltung teilnehmen.

- (c) Das Überholen ist unzulässig bei unklarer Verkehrslage oder wenn es durch ein angeordnetes Verkehrszeichen untersagt ist. [StVO]

$$\begin{aligned}
 X &= \left(\left(\text{Lage}_{\text{unklar}} \right) \vee \text{Zeichen} \right) \Rightarrow \text{Überholverbot} \\
 \neg X &= \neg \left[\left(\left(\text{Lage}_{\text{unklar}} \right) \vee \text{Zeichen} \right) \Rightarrow \text{Überholverbot} \right] \\
 &= \left(\left(\text{Lage}_{\text{unklar}} \right) \vee \text{Zeichen} \right) \wedge \neg(\text{Überholverbot}) \\
 &\text{siehe (b)}
 \end{aligned}$$

Sie dürfen auch dann überholen, wenn die Verkehrslage unklar ist oder ein Verkehrszeichen dies untersagt.

- (d) Sie werden zur Prüfung zugelassen, wenn Sie die Zulassung in diesem Semester erwerben oder wenn Sie eine der folgenden Voraussetzungen erfüllen: Sie sind in einem der Studiengänge MAA, FVM oder NVM eingeschrieben und haben bereits einmal erfolglos an einer Prüfung zur Linearen Algebra I teilgenommen, oder Sie sind in einem der Studiengänge IFO, PHY, MPH, CLI eingeschrieben und haben die Zulassung bereits in einem früheren Semester erworben.

$$\begin{aligned}
 X &: \left[\left(\text{Erwerb}_{\text{jetzt}} \right) \vee \left(\text{MAA}_{\text{etc.}} \wedge \text{durchgefallen} \right) \vee \left(\text{IFO}_{\text{etc.}} \wedge \text{Erwerb}_{\text{früher}} \right) \right] \\
 &\Rightarrow \text{Zulassung}
 \end{aligned}$$

$\neg X$: siehe b:

$$\begin{aligned}
 &\left(\left(\text{Erwerb}_{\text{jetzt}} \right) \vee \left(\text{MAA}_{\text{etc.}} \wedge \text{durchgefallen} \right) \vee \left(\text{IFO}_{\text{etc.}} \wedge \text{Erwerb}_{\text{früher}} \right) \right) \\
 &\quad \wedge \neg(\text{Zulassung})
 \end{aligned}$$

Sie werden nicht zur Prüfung zugelassen, obwohl Sie die Zulassung in diesem Semester erwerben oder ...

(e) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

$$\begin{aligned} X &= (\exists! p \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ gerade}) \\ &= (\exists p \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ gerade}) \quad A: \text{Existenz} \\ &\wedge (\forall p, q \in \{\text{Primzahlen}\} : (p \text{ gerade} \wedge q \text{ gerade} \Rightarrow p = q)) \quad B: \text{Eindeutigkeit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \neg X &= \neg (A \wedge B) \\
 &= \neg A \vee \neg B \\
 &= \neg (\exists p \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ gerade}) \\
 &\quad \vee \neg (\forall p, q \in \{\text{Primzahlen}\} : (p \text{ gerade} \wedge q \text{ gerade} \Rightarrow p = q)) \\
 &= (\forall p \in \{\text{Primzahlen}\} : \neg (p \text{ gerade})) \\
 &\quad \vee \exists p, q \in \{\text{Primzahlen}\} : \neg (p \text{ gerade} \wedge q \text{ gerade} \Rightarrow p = q) \\
 &= (\forall p \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ ungerade}) \\
 &\quad \vee \exists p, q \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ gerade} \wedge q \text{ gerade} \wedge \neg (p = q) \\
 &\quad \quad \quad \text{siehe 6} \\
 &= (\forall p \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ ungerade}) \\
 &\quad \vee \exists p, q \in \{\text{Primzahlen}\} : p \text{ gerade} \wedge q \text{ gerade} \wedge p \neq q
 \end{aligned}$$

Alle Primzahlen sind ungerade
oder es gibt zwei verschiedene gerade Primzahlen.

2 | Wenn der Meister Venn nicht wär ...

Seien A und B Teilmengen einer Menge X . Welche der folgenden Aussagen sind allgemein richtig?

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap B$

z.B. für $X = \mathbb{R}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{ist } X \setminus (A \cup B) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(X \setminus A) \cap B = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \\ = \{5, 6\}.$$

oder für $X = \{1\}$, $A = \emptyset$, $B = \emptyset$

$$\text{ist } X \setminus (A \cup B) = \{1\}$$

$$(X \setminus A) \cap B = \emptyset$$

(b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

z.B.: für $X = \{a, b\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$

$$\text{ist } A \setminus B \cap B \setminus A = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{a, b\} \setminus \emptyset = \{a, b\}$$

(c) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B)$

Es ist nach Satz 1.8:

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Ferner ist $A \setminus B \subseteq X \setminus B$, also ist

$$X \setminus B = (X \setminus B) \cup (A \setminus B),$$

also folgt

$$X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \cup (A \setminus B).$$

3 | Endlich vereint ★

(a) Jede Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen ist endlich. Ist jede Vereinigung unendlich vieler paarweise verschiedener Mengen unendlich? ^(b)

a: Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ endlich viele endliche Mengen. Dann ist

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Also ist $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ endlich.

b: I Indexmenge,

A_i Menge (für jedes $i \in I$)

Annahme: I unendlich

$$\forall i, j \in I: i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$$

Behaupt.: $\bigcup_{i \in I} A_i$ unendlich

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, $\bigcup_{i \in I} A_i$ endlich.

Jedes A_i ist eine Teilmenge von $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Andererseits ist $\mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$ endlich.

(Für endliche Menge (X) ist $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.)

Also gibt es nur endlich viele verschiedene A_i . ✗

□

4 | Wachstum ★

Welche der folgenden Zahlen x und y ist jeweils die größere?

(a) $x = 31^{11}$ und $y = 17^{14}$

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} \\ < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$$

(b) $x = 2^{1000} + 3^{1000}$ und $y = 4^{1000}$

$$\begin{aligned} y &= 4^{1000} = (3+1)^{1000} \\ &= \underbrace{(3+1) \cdot (3+1) \cdot \dots \cdot (3+1)}_{1000 \text{ Faktoren}} \\ &= 3^{1000} + 1000 \cdot 3^{999} \cdot 1 + \dots + 1^{1000} \\ &> 3^{1000} + 1000 \cdot 3^{999} \cdot 1 \\ &> 3^{1000} + 2 \cdot 2^{999} \\ &= 3^{1000} + 2^{1000} = x \end{aligned}$$

(c) $x = 1000! \underbrace{\dots\dots!}_{999 \text{ mal } !}$ und $y = 999! \underbrace{\dots\dots!}_{1000 \text{ mal } !}$

$$1000 < 999!, \text{ also ist} \\ x = 1000 \underbrace{!!!}_{999} < (999!) \underbrace{!!!}_{999} = y$$