

Lineare Algebra I Blatt 0

0-1 | Fadenkreuz

Haben die folgenden beiden Geraden $g_1: y = 3x + 5$ und $g_2: y = 5x + 1$ in \mathbb{R}^2 einen Schnittpunkt? Wenn ja, welchen?

0-2 | NinA (Nicht-lineare Algebra)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen in der x - y -Ebene \mathbb{R}^2 , die durch die folgenden (Un-)Gleichung beschrieben werden:

- (a) $x^2 + y^2 = 1$
- (b) $xy \geq 1$
- (c) $x^2 = y^2$
- (d) $x^2 + y^2 = -1$

0-3 | Geometrie

Wie viele Ecken, Kanten, Flächen und Hyperflächen besitzt ein vierdimensionaler Würfel?

0-4 | Wachstum

Welche der folgenden Zahlen x und y ist jeweils die größere?

- (a) $x = 31^{11}$ und $y = 17^4$
- (b) $x = 2^{3333}$ und $y = 3^{2222}$
- (c) $x = 2^{1000} + 3^{1000}$ und $y = 4^{1000}$
- (d) $x = (1.01)^{1000}$ und $y = 1000$
- (e) $x = 1000^{888}$ und $y = 999^{444}1001^{444}$
- (f) $x = \underbrace{1000! \dots!}_{999 \text{ mal !}}$ und $y = \underbrace{999! \dots!}_{1000 \text{ mal !}}$

In allen Aufgaben sind alle Behauptungen zu beweisen. Gleichmaßen sind alle Antworten auf gestellte Fragen zu belegen, sei es durch einen Beweis, sei es durch ein konkretes Gegenbeispiel. Für dieses 0. Übungsblatt erhalten Sie noch keine Punkte. Ab dem nächsten Übungsblatt können Sie pro Aufgabe bei richtiger Lösung bis zu 5 Punkte erhalten, die zur Qualifikation zur Klausur relevant sind.

Lineare Algebra I

Blatt 1

1-1 | Geradengleichheit

Überprüfen Sie, ob in den folgenden Beispielen die beiden durch \mathbf{v} , \mathbf{w} und \mathbf{v}' , \mathbf{w}' bestimmten Geraden $L = \mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$ und $L' = \mathbf{v}' + \mathbb{R}\mathbf{w}'$ jeweils übereinstimmen:

- (a) $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ und $\mathbf{v}' = (5, 0, 2)$, $\mathbf{w}' = (10, -5, 5)$
(b) $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 3)$ und $\mathbf{v}' = (0, 1, -3)$, $\mathbf{w}' = (0, 2, 1)$

1-2 | Verwandlung

- (a) Finden Sie für die Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4\}$$

eine Parametrisierung.

- (b) Beschreiben Sie die in der Parameterdarstellung gegebene Ebene

$$E = (2, 3, -1) + \mathbb{R} \cdot (1, 0 - 1) + \mathbb{R} \cdot (-3, 4, 2)$$

durch eine lineare Gleichung.

1-3 | Unabhängigkeitsbestrebungen

- (a) Zeigen Sie, dass für Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Es ist $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, und \mathbf{v} und \mathbf{w} sind nicht skalare Vielfache voneinander.
(ii) Aus $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = \mathbf{0}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ folgt stets $\lambda = \mu = 0$.

Zwei Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} , die diese Bedingungen erfüllen, heißen **linear unabhängig**.

- (b) Sind die Vektoren $\mathbf{v} = (-3, 1, 0)$ und $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ linear unabhängig?

1-4 | Tertium non datur

Ein Grundprinzip der klassischen Logik besagt, dass für eine beliebige Aussage nur die Aussage selbst oder ihr Gegenteil gelten kann, nicht aber beides oder irgendetwas dazwischen. Formulieren Sie die zu den folgenden Aussagen gegenteiligen Aussagen:

- (a) Alle Vöglein sind schon da. [Volkslied]
(b) Das Überholen ist unzulässig bei unklarer Verkehrslage oder wenn es durch ein angeordnetes Verkehrszeichen untersagt ist [StVO].
(c) Jede gerade Zahl ist die Summe von zwei Primzahlen.
(d) Nachts sind alle Katzen grau
(e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.

Lineare Algebra I

Blatt 2

2-1 | Schema F

Bestimmen Sie die (reellen) Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme in fünf reellen Variablen. Bitte geben Sie bei Aufgaben dieses Typs immer den vollständigen Lösungsweg an.

$$(a) \begin{cases} x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 11x_5 = 4 \\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 - 7x_5 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 11x_5 = 4 \\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2-2 | Problemfamilie

Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende LGS in Matrixdarstellung lösbar ist, und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 6t \\ 2 & 12 & 7 & 6t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & 8t + 12 \end{array} \right)$$

2-3 | Reverse engineering

Geben Sie drei Ebenen E_1 , E_2 und E_3 , die sich paarweise in den folgenden drei Geraden schneiden:

$$g_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = E_1 \cap E_2, \quad g_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_1 \cap E_3$$
$$g_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = E_2 \cap E_3.$$

Sind die Ebenen durch obige Anforderungen eindeutig bestimmt?

2-4 | Rasterfahndung

Bestimmen Sie alle *ganzzahligen Lösungstriple* (x_1, x_2, x_3) (d.h. x_1, x_2 und x_3 sind ganzzahlig) der folgenden beiden linearen Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 - 15x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3 = 8 \end{cases}$$

Lineare Algebra I

Blatt 3

3-1 | Dienst nach Vorschrift

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Untersuchen Sie darüber hinaus die wohldefinierten Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und geben Sie ggf. die Umkehrabbildung an. Alle Aussagen sind zu begründen.

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$
- (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x^2 \mapsto x$
- (c) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto$ Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n

(beachte: 1 hat 0 Primfaktoren)

3-2 | Wenn der Meister Venn nicht wär ...

Seien A und B Teilmengen einer Menge X . Beweisen Sie allgemein die Richtigkeit der Aussagen (a) bis (c) oder widerlegen Sie die entsprechende Aussage durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels.

- (a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- (b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup B$
- (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

3-3 | Schnittbild

Gegeben sei eine Abbildung $f: M \rightarrow N$. Weiter sei I eine beliebige Indexmenge und $M_i \subseteq M$ für $i \in I$ eine beliebige Familie von Teilmengen von M .

- (a) Zeigen Sie, dass $f(\bigcup_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} f(M_i)$ gilt.
- (b) Gilt auch $f(\bigcap_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$? Ihre Aussage ist zu begründen.

3-4 | Machtdemonstration

Die **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M ist definiert als die Menge aller Teilmengen von M :

$$\mathfrak{P}(M) := \{N \mid N \subset M\}.$$

Beispielsweise ist $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, und $\mathfrak{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Weisen Sie nach, dass die Potenzmenge einer Menge stets mächtiger ist als die Menge selbst, indem Sie zeigen:

- (a) Für jede Menge M existiert eine injektive Abbildung $M \rightarrow \mathfrak{P}(M)$, aber
- (b) Für keine Menge M existiert eine bijektive Abbildung $M \rightarrow \mathfrak{P}(M)$.

Lineare Algebra I Blatt 4

4-1 | Gleichmacherei

Nachstehend sind einige Relationen auf \mathbb{Z} angegeben. Welche davon sind symmetrisch, reflexiv bzw. transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen, und was sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

a) $x \sim y \iff xy \geq 0$ b) $x \sim y \iff xy > 0$ c) $x \sim y \iff x$ teilt y

4-2 | Strukturförderung

Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? Ihre Aussagen sind zu begründen.

a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_1(z) = z^3$ b) $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, f_2(z) = 2^z$
c) $f_3 : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}, f_3([z]_6) = [3^z]_7$ d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, f_4(z) = 2 \cdot |z|$
d) $f_5 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, f_5(z) = z^3$

Dabei haben \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{[0]_6, \dots, [5]_6\}$ eine additive und $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\} = \{[1]_7, \dots, [6]_7\}$ sowie $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine multiplikative Verknüpfung.

4-3 | Synchronknüpfen

Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $G \times H$ zweier Gruppen (G, \cdot) und (H, \circ) mit der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g, h) \circ (g', h') := (g \cdot g', h \circ h')$$

wieder eine Gruppe ist. Zeigen Sie ferner, dass es sich bei den Projektionen

$$(G, \cdot) \leftarrow (G \times H, \circ) \rightarrow (H, \circ)$$

um Homomorphismen handelt.

4-4 | Kleines 1 x 1

Ein Quadrat $ABCD$ liege derart in der Ebene, dass sein Diagonalschnittpunkt im Ursprung liegt und die Seite AB bzw. BC parallel zur x - bzw. y -Achse verläuft.

Die Symmetriegruppe S_{\square} des Quadrats besteht aus den folgenden acht Transformationen: vier Drehungen d_i um den Ursprung mit Drehwinkeln $i \cdot \frac{\pi}{2}$ ($i \in \{0, \dots, 3\}$) entgegen dem Uhrzeigersinn und vier Achsenspiegelungen, nämlich s_x (Spiegelung an der x -Achse), s_y (Spiegelung an der y -Achse), s_d (Spiegelung an der Diagonalen/Geraden AC) und s_n (Spiegelung an der Nebendiagonalen/Geraden DB). Die Verknüpfung auf S_{\square} ist die Hintereinanderausführung dieser Transformationen. Geben Sie zu jedem Element das inverse Element und zu je zwei Elementen deren Verknüpfung an!

Lineare Algebra I

Blatt 5

5-1 | Rein in die Kartoffeln, raus aus den Kartoffeln

Finden Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus in den folgenden Beispielen jeweils einen größten gemeinsamen Teiler c von a und b . Finden Sie ferner Ringelemente x und y , für die gilt: $c = xa + yb$.

- (a) $a = 21$, $b = 15$ im Ring der ganzen Zahlen \mathbb{Z}
(b) $a = t^3 - 2t^2 - t + 2$, $b = t^3 - 4t^2 + 3t$ im Polynomring $\mathbb{R}[t]$

5-2 | Ringelringelreihe

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und X eine Menge. Definieren Sie auf der Menge $\text{Abb}(X, R)$ der Abbildungen $X \rightarrow R$ eine Addition \oplus und eine Multiplikation \odot derart, dass gilt:

- $(\text{Abb}(X, R), \oplus, \odot)$ ist ein Ring mit Eins und
- die Abbildung $\gamma: R \rightarrow \text{Abb}(X, R)$, die jedes Element $r \in R$ auf die konstante Abbildung $x \mapsto r$ aus $\text{Abb}(X, R)$ schickt, definiert einen Homomorphismus $(R, +, \cdot) \rightarrow (\text{Abb}(X, R), \oplus, \odot)$ von Ringen mit Eins.

Weisen Sie nach, dass die von Ihnen definierten Verknüpfungen beide Anforderungen erfüllen.

5-3 | Einsatz

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Jedes Polynom $f \in R[t]$ definiert durch Auswertung („Einsetzen“) eine Abbildung $\tilde{f}: R \rightarrow R$. Beispielsweise ist für $f = t + 1 \in R[t]$ die Abbildung \tilde{f} gegeben durch $x \mapsto x + 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{A}: R[t] \rightarrow \text{Abb}(R, R) \\ f \mapsto \tilde{f}$$

bezüglich der in der vorherigen Aufgabe definierten Ringstruktur auf $(\text{Abb}(R, R), \oplus, \odot)$ (wähle also $X = R$ in Aufgabe 2) ein Homomorphismus von Ringen mit Eins ist.

5-4 | Bestimmung

Zeigen Sie, dass die Abbildung \mathcal{A} aus der vorherigen Aufgaben für $R = \mathbb{R}$ injektiv ist. Ein reelles Polynom f ist also eindeutig bestimmt durch die Abbildung \tilde{f} , die es definiert.

Gilt dies allgemeiner auch für Polynome über einem beliebigen Körper R ?

Tipp: Überlegen Sie sich zunächst, was Sie über die Nullstellen und den Grad eines Polynoms f aussagen können, wenn \tilde{f} die Nullabbildung $x \mapsto 0$ ist.

Lineare Algebra I

Blatt 6

6-1 | Restrukturierung

Wir betrachten die Mengen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ der Restklassen *mod* 3 bzw. *mod* 6.

- (a) Wie viele Abbildungen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gibt es?
- (b) Wie viele dieser Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?
- (c) Wie viele dieser Abbildungen sind Homomorphismen von Ringen mit Eins?

Zur Erinnerung: Ein Homomorphismus von Ringen mit Eins wirft 1 auf 1.

6-2 | Kreuzschnitt

Sei V ein K -Vektorraum mit Untervektorräumen W, V_1, V_2 . Zeigen Sie, dass aus $W \subseteq V_1 \cup V_2$ folgt: $W \subseteq V_1$ oder $W \subseteq V_2$.

6-3 | Flachwurzler

Wir betrachten die Nullstellen des Polynoms $X^3 - 3X^2 + 2X$ in verschiedenen Restklassenringen.

- (a) Welche Nullstellen hat es über dem Ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?
- (b) Welche Nullstellen hat es über $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$?

6-4 | Gaußsche Zahlen

Die komplexen Zahlen aus der Menge $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ werden Gaußsche Zahlen genannt.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Unterring mit Eins von \mathbb{C} ist.
- (b) Weisen Sie ferner nach, dass eine Zahl $z \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ist, wenn $|z| = 1$ gilt.
- (c) Bestimmen Sie so alle Einheiten von $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ und damit die Elemente der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[\mathbf{i}])^\times$.
- (d) Zu welcher aus der Vorlesung bekannten Gruppe ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}[\mathbf{i}])^\times$ isomorph? Definieren Sie dazu eine entsprechende Abbildung φ und zeigen Sie, dass diese tatsächlich ein Isomorphismus von Gruppen ist.

Hinweis: Wenn Sie b) nicht beweisen können, dürfen Sie dennoch die Aussage in b) zur Bearbeitung von Teil c) verwenden.

Lineare Algebra I

Blatt 7

7-1 | Systemfragen

Welche der folgenden Familien von Vektoren in \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen?

(a) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ (b) $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ (c) $\mathcal{H} = (\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}}$

7-2 | Stolperstufen

Die Menge der Abbildungen $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist auf natürliche Weise ein \mathbb{R} -Vektorraum (siehe Vorlesung, oder [F&S, §2.4.1, Beispiel e]). Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die folgende Abbildung:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

Ist die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aller dieser Abbildungen linear unabhängig in $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Ist sie ein Erzeugendensystem?

7-3 | Verpackungswahn

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Teilmengen M, N eines beliebigen K -Vektorraums V :

(a) $\text{span}(M \cap N) = \text{span}(M) \cap \text{span}(N)$ (c) $V \setminus \text{span}(M) = \text{span}(V \setminus M)$
(b) $\text{span}(M \cup N) = \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$ (d) $\text{span}(\text{span}(M)) = \text{span}(M)$

7-4 | Erbsenzähler

Sei p eine Primzahl. Wie viele Elemente hat ein n -dimensionaler $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -Vektorraum?

Lineare Algebra I

Blatt 8

8-1 | Ecce homo

Welche der folgenden Abbildungen sind \mathbb{R} -linear?

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 - x^2$
- (b) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
- (c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$
- (d) $\mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$
 $f \mapsto t^2 \cdot f$
- (e) $\mathbb{R}[t] \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $f \mapsto (x \mapsto \tilde{f}(x))$

Hinweis: \tilde{f} wurde in Aufgabe 3 auf Blatt 5 definiert.

8-2 | Auf und Ab

Die *formale Ableitung* eines Polynoms $f = \sum_{i \geq 0} a_i t^i \in \mathbb{R}[t]$ ist gegeben durch $f' := \sum_{i \geq 1} i a_i t^{i-1}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \mapsto f'$ auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ einen Endomorphismus definiert.
- (b) Welchen Kern und welches Bild hat dieser Endomorphismus?

8-3 | Komplement

Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum U eines K -Vektorraums V ein Komplement besitzt, und zwar im folgenden Sinn: Zu jedem Untervektorraum $U \subset V$ existiert ein Untervektorraum $W \subset V$, für den gilt: $U + W = V$ und $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

8-4 | Fahnen

Eine *Fahne der Länge d* in einem Vektorraum V ist eine Kette von Untervektorräumen von V der Form $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_d$. Zeigen Sie, dass in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V die maximale Länge einer solchen Fahne gleich der Dimension von V ist, d.h. weisen Sie nach, dass $\max\{d \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt eine Fahne der Länge } d\} = \dim V$ gilt.

Notation: $A \subsetneq B$ bedeutet ($A \subset B$ aber $A \neq B$).

Lineare Algebra I Blatt 9

9-1 | Suchbild

Welche der folgenden Abbildungen sind \mathbb{R} -linear? Welche Dimension haben für die \mathbb{R} -linearen Abbildungen jeweils Kern und Bild?

$$\begin{array}{ccccc} f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & j: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 0 \\ y-2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 3y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array}$$

Hinweis: In den Fällen von Linearität können Sie in dieser Aufgabe ausnahmsweise auf einen Nachweis verzichten. In den Fällen von Nicht-Linearität den Nachweis aber bitte führen.

9-2 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f , g , h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 & g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 & h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ 3x+2y-z \\ z+7x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z-3w \\ y-3w \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

9-3 | Projektion

Sei $p: V \rightarrow V$ ein *idempotenter* Endomorphismus eines K -Vektorraums V . Das heißt, p ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$ mit $p \circ p = p$.

- (a) Gibt es einen derartigen Endomorphismus auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$?
(b) Zeigen Sie, dass für jeden solchen Endomorphismus p gilt:

$$\text{Ker}(p) + \text{Im}(p) = V \text{ und } \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{\mathbf{0}\}.$$

Das Bild ist also ein Komplement des Kerns im Sinn von Aufgabe 8-3.

Hinweis: Sie benötigen die Voraussetzung, dass V endlich-dimensional ist, nicht zur Lösung.

9-4 | Gefühlte Redundanz

Sind V und W Vektorräume über einem Körper K , so ist jede K -lineare Abbildung $V \rightarrow W$ insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $(V, +) \rightarrow (W, +)$. Gibt es auch Beispiele für nicht- K -lineare Gruppenhomomorphismen $(V, +) \rightarrow (W, +)$? Beantworten Sie die Frage für die Fälle. *Hinweis: Ihre Antwort ist zu begründen.*

- (a) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (b) $K = \mathbb{Q}$ (c) $K = \mathbb{R}$ (d) $K = \mathbb{C}$.

begründen. Der Fall (d) ist der einfachste. Der heikelste Fall ist (c). Hier kann die allgemeine Existenz von Komplementen (Aufgabe 8-3) helfen.

Lineare Algebra I Blatt 10

10-1 | Kernkompetenz

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind surjektiv? Welche injektiv? In den Kernen welcher Abbildungen liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? In den Bildern welcher Abbildungen liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

10-2 | Bitte wenden!

Sind die folgenden reellen Matrizen invertierbar? Falls ja, wie lauten die zugehörigen Inversen?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & \frac{13}{2} \\ -\frac{18}{13} & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

10-3 | Rollenspiel

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x} \in (\mathbb{F}_3)^3$ und $\mathbf{b} \in (\mathbb{F}_3)^3$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von \mathbf{x} und \mathbf{b} die Anzahl $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ der Matrizen $A \in M_{\mathbb{F}_3}(3 \times 3)$, für die $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt.

10-4 | Potenzproblem

Wir nennen eine quadratische Matrix A *nilpotent*, wenn eine ihrer Potenzen A^k ($k \in \mathbb{N}$) die Nullmatrix ist. Eine *strikte obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass strikte obere Dreiecksmatrizen nilpotent sind.
- Zeigen Sie, dass für jede nilpotente $n \times n$ -Matrix A die Matrix $E_n - A$ invertierbar ist.
- Welches Inverse hat die folgende Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipp zu Aufgabenteil (b): $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ („geometrische Reihe“)

Lineare Algebra I Blatt 11

11-1 | Wechselstimmung

Sei $V := \{^t(x \ y \ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
 $W := \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel \mathcal{B} und \mathcal{B}' bzw. \mathcal{C} und \mathcal{C}' jeweils Basen von V bzw. W sind:

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Sei $F: V \rightarrow W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} gegeben ist durch die Matrix

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F)$!

11-2 | Babel

Seien OL, UL, OR und UR die folgenden Matrizen:

$$\text{OL} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{OR} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{UL} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{UR} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als Basis des Vektorraums $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ aller reellen 2×2 -Matrizen wählt ...

... Clara das Tupel $\mathcal{C} := (\text{OL}, \text{OR}, \text{UL}, \text{UR})$,

Jaël das Tupel $\mathcal{J} := (\text{OR}, \text{OL}, \text{UR}, \text{UL})$,

Hunahpú das Tupel $\mathcal{H} := (\text{OL} - \text{UR}, \text{OR}, \text{UL}, \text{OL} + \text{UR})$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei \mathcal{C} , \mathcal{J} und \mathcal{H} tatsächlich um Basen von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ handelt.

(b) Bestimmen Sie die Matrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(t)$, $M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(t)$ und $M_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}}(t)$, mit denen Clara, Jaël und Hunahpú jeweils die Transpositionsabbildung

$$t: M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

beschreiben würden.

11-3 | Tippelschritte

Sei $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis eines K -Vektorraums V . Zeigen Sie, dass auch diejenigen Tupel eine Basis von V sind, die man erhält, indem man für beliebige verschiedene $i, j \in \{1, \dots, n\}$

(I) \mathbf{v}_i und \mathbf{v}_j vertauscht, oder

(II) \mathbf{v}_i durch $s\mathbf{v}_i$ für ein $s \in K^\times$ ersetzt, oder

(III) \mathbf{v}_i durch $\mathbf{v}_i + s\mathbf{v}_j$ ersetzt, für ein beliebiges $s \in K$.

11-4 | Spindel

Welche reellen 2×2 -Matrizen kommutieren mit allen anderen reellen 2×2 -Matrizen? Das heißt, für welche $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ gilt: $AB = BA$ für alle $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$?

Lineare Algebra I Blatt 12 (Bonusblatt)

12-1 | Zykelzerlegung

Welche Zykelzerlegung und welches Signum haben die folgenden Permutationen?

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 3 & 1 & 2 & 10 & 9 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

12-2 | Abakus

Zeigen Sie, dass für die folgenden $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen gilt:

$$a) \quad \det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n (n+1) \cdot a_1 \cdots a_n$$

$$b) \quad \det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a+nb)(a-b)^n \quad \text{Tipp: Sie können hier a) verwenden.}$$

12-3 | Prima

Das folgende lineare Gleichungssystem lässt sich für jede Primzahl p als Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auffassen:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Für welche Primzahlen p ist es lösbar?
- (b) Für welche Primzahlen p ist es homogen? Bestimmen Sie in diesen Fällen jeweils den Lösungsraum und dessen Dimension.

12-4 | Unsere Lösung, Ihr Problem

Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum von K^n der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems ist.