

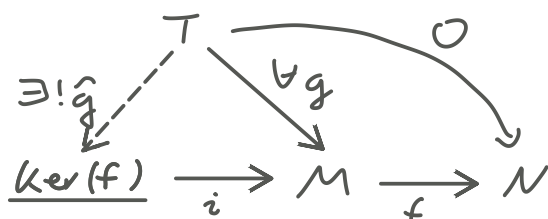
Korrekturen & Nachträge

[im veröffentlichten Skript bereits korrigiert bzw. ergänzt]

K4, Universelle Eigenschaften

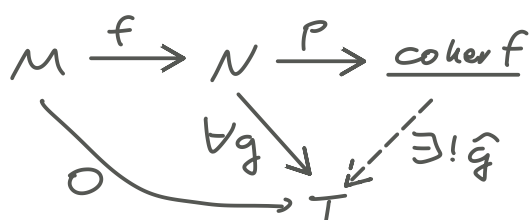
10a. Beispiel

Der (kategorielle) Kern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\ker(f)}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $\underline{\ker(f)} \xrightarrow{i} M$ derart, dass $f \circ i = 0$ und die folgende \mathcal{U} erfüllt ist:



10b. Beispiel

Der (kategorielle) Kokern eines Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Objekt $\underline{\text{coker} f}$ in Mod_R zusammen mit einem Morphismus $N \xrightarrow{p} \underline{\text{coker} f}$ derart, dass $p \circ f = 0$ und die folgende \mathcal{U} erfüllt ist:



K5, Limiten & Kolimiten

Bsp. 12 (e)

Ein Kern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Limes von $M \xrightarrow{f} N$ (vgl. K4, Bsp. 10a).

Bsp. 14 (e)

Ein Kokern von $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R ist ein Kolimes von $M \xrightarrow{f} N$ (vgl. K4, Bsp. 10b).

K6, Adjunktionen

Beispiel 3 (d)

R kommutativer Ring, $M \in \text{ob Mod}_R$

$$\text{Adjunktion} \quad \text{Mod}_R \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_R M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R$$

allgemeiner, für beliebigen Ring R :

$M \in \text{ob}_R \text{Mod}$ liefert Adjunktion

$$\text{Mod}_R \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_R M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_Z(M, -)} \end{array} \text{Ab}$$

$\text{Hom}_Z(M, A)$ ist Rechts- R -Modul via
 $(f \cdot r)(m) := f(r \cdot m)$ für $r \in R, m \in M, f: M \rightarrow A$

$A \otimes_Z M$ ist Rechts- R -Modul:
M3, Satz 12

$M \in \text{ob Mod}_R$ liefert Adjunktion

$$\text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_Z M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R$$

K7 Abelsche Kategorien

4. Def.: Kern und Kokern eines Morphismus $f: X \rightarrow Y$

lassen sich in jeder additiven Kategorie genauso wie in Mod_R definieren als Limes bzw.

Kolimes von $X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0} \end{array} Y$

- vgl. K4, Bsp. 10 & K5, Bsp. 12 (e) & 14 (e)).

14. Übung: F linksexakt $\Leftrightarrow F$ erhält Kerne
 F rechtsexakt $\Leftrightarrow F$ erhält Kokerne

16. Satz:

Rechtsadjungierte additive Funktoren sind linksexakt.
Linksadjungierte additive Funktoren sind rechtsexakt.

Beweis: Übung 14 & RAPL (K6, Satz 12). □

M5 Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{Ab} \\ \text{und } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Ab} \quad \text{linksexakt.} \end{aligned}$$

Kurzbeweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ für $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$:

$$\text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_{\mathbb{Z}} M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R \quad (\text{K6, Bsp. 3(d)})$$

und Rechtsadjungierte sind linksexakt (K7, Satz 16). □