M5: Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)\colon \mathcal{A} \longrightarrow Ab$$
und $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)\colon \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Ab \qquad \text{linksexakt.}$$

Allgemeiner Beweis zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,X)$:

gegeben: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ exakt in $\mathcal{A}^{op}$,

also $0 \longleftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ exakt in $\mathcal{A}$.

Zu zeigen:
$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)}_{\ni\, a} \xrightarrow{f^*} \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X)}_{\ni\, b} \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,X) \quad \text{exakt in } Ab.$$
$$a \mapsto 0 \qquad\qquad b \mapsto 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[l, two heads, "f"'] \arrow[dl, "0"] & C \arrow[l, "g"'] \\
 & X & &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[l, two heads, "f"'] \arrow[d] & C \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "0"] \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

$a = 0$, denn f Epi

$\dashrightarrow$ existiert, da f ein Kokern von g.

Allgemeiner Beweis zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)$: analog

Kurzbeweis zu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-)$ für $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}_R$:

$$\begin{tikzcd}
Ab \arrow[r, shift left, "-\otimes_{\mathbb{Z}} M"] & \mathrm{Mod}_R \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"]
\end{tikzcd} \qquad (\text{K6, Bsp. } 3(d))$$

und Rechtsadjungierte sind linksexakt (K7, Satz 16). $\square$

⚠ Im Allgemeinen nicht exakt z. B. ($\mathcal{A} = \mathcal{A}b$):

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}): \quad 0 \cancel{\longleftarrow} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, -): \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \cancel{\longrightarrow} 0$$

2. Def.: $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie

Ein Objekt P in $\mathcal{A}$ ist **projektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ exakt ist.

Ein Objekt I in $\mathcal{A}$ ist **injektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I)$ exakt ist.

3. Notiz: P ist projektiv g.d.w. gilt:

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,C)$ surjektiv $\forall$ Epis $B \twoheadrightarrow C$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\exists f \text{ mit } p_* f = g"'] \arrow[d, "\forall g"] \\
B \arrow[r, two heads, "\forall \text{ Epis}"', "p"] & C
\end{tikzcd}$$

I ist injektiv g.d.w. gilt:

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,I)$ surjektiv $\forall$ Monos $B \hookleftarrow C$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "\forall \text{ Monos}", "g"'] \arrow[d, "\forall i"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists j \text{ mit } g^* j = i"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

4. Satz (projektive Moduln)

Ein Rechts-R-Modul P ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist (d.h.: wenn es R-Modul Q und freien R-Modul F gibt mit $F \cong P \oplus Q$).

Insbesondere sind freie Moduln projektiv.*

(* Das hatten wir ohne diese Sprache bereits gesehen und gezeigt in MZ, Satz 6.)

Beweis:

($\Leftarrow$) Falls $P = \bigoplus_{i \in I} R$ frei:

$$\begin{tikzcd}
& & \bigoplus_{i\in I} R \arrow[dll, dashed, "\exists f \text{ mit } p_* f = g"'] \arrow[d, "g"] & \ni e_i \arrow[d, mapsto] \\
B \arrow[rr, two heads, "p"'] & & C & \\
b_i \in B \arrow[rrr, mapsto] & & & g(e_i)
\end{tikzcd}$$

Wähle für jedes Basiselement e_i von P ein Urbild b_i von $g(e_i)$ unter p. Definiere f durch $f(e_i) := b_i$.

Falls allgemeinen $P \oplus Q$, betrachte:

∃ zu $g \circ (\mathrm{id}\ 0)$ da $P \oplus Q$ frei

$$\begin{tikzcd}
& P \oplus Q \arrow[ddl, dashed, bend right, "f_{P\oplus Q}"'] \arrow[d, shift left, "(\mathrm{id}\ 0)"] \\
& P \arrow[u, shift left, "\binom{\mathrm{id}}{0}"] \arrow[dl, dashed, "f_P"'] \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, two heads, "p"'] & C
\end{tikzcd}$$

Definiere $f_P := f_{P\oplus Q} \circ \binom{\mathrm{id}}{0}$. [...]

($\Rightarrow$) Wähle $F \overset{p}{\twoheadrightarrow} P$ mit F frei und betrachte:

$$\begin{tikzcd}
& & & P \arrow[dl, dashed, "\exists s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "p"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da P projektiv, $\exists s$, d.h. Sequenz spaltet; insbesondere $F \cong P \oplus Q$. $\square$

5. Korollar (proj. Moduln über HIR)

Für Moduln M über einem HIR gilt:

$$M \text{ projektiv} \iff M \text{ frei}$$

Beweis:

($\Leftarrow$) Satz 4

($\Rightarrow$) Satz 4 + $\lfloor$ Untermoduln freier Moduln über HIR sind frei $\rfloor$

endl. erzeugten Fall: MZ, Satz 9

allgemein: Rotman, Corollary 4.19

$\square$

6. Satz (injektive Moduln; Baersches Kriterium)

Für Rechts-R-Moduln I gilt:

$$I \text{ injektiv} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Rechtsideale } J \rightarrowtail R: \\ \begin{tikzcd} J \arrow[r, tail] \arrow[d, "\forall i"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists j"] \\ I & \end{tikzcd} \end{array} \right.$$

$\square$

7. Korollar (injektive Moduln über HIR):

Für einen Modul I über einem HIR R gilt:

I injektiv $\iff$ I divisibel

(d.h. $I \xrightarrow{r\cdot} I$ ist surjektiv $\forall r \in R\setminus\{0\}$)

Beweis:

Da R HIR, ist $R \xrightarrow{r\cdot} R$ injektiv für jedes $r \in R\setminus\{0\}$, und jedes Ideal $J \rightarrowtail R$ ist von dieser Form.

Nach Baerschem Kriterium gilt also:

I injektiv

$$\iff \underbrace{\mathrm{Hom}_R(R,I)}_{\substack{\cong \\ I}} \xrightarrow{(r\cdot)^*} \underbrace{\mathrm{Hom}_R(R,I)}_{\substack{\cong \\ I}} \text{ surjektiv } \forall r \neq 0$$

$$I \xrightarrow{\cdot r} I$$

$\square$

8. Beispiele:

injektiv/$\mathbb{Z}$	nicht injektiv/$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, S^1	$\mathbb{Z}/m$ für $m \neq 1$

9 Satz: Für $M \in \mathrm{ob}\,{}_R\mathrm{Mod}$ ist

$$- \otimes_R M : \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab} \quad \text{rechtsexakt.}$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_R \arrow[r, shift left, "- \otimes_R M"] & \mathrm{Ab} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)"] \end{tikzcd} \qquad (\text{K6, Bsp. } 3(d))$$

und Linksadjungierte sind rechtsexakt (K7, Satz 16).
(Alternativ siehe Blatt 8, Aufgabe 2.) $\square$

⚠ Aber das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt,
z.B. $(R = \mathbb{Z})$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

$$- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$$

$$\cancel{0} \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

10. Def.: M aus ${}_R\mathrm{Mod}$ ist flach, falls $- \otimes_R M$ exakt.
M aus Mod_R ist flach, falls $M \otimes_R -$ exakt.

11. Notiz: M aus ${}_R\mathrm{Mod}$ ist genau dann flach, wenn gilt:
$A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M$ ist Mono für alle Monos
$A \rightarrowtail B$.

12. Bsp.

(a) Jeder freie Modul ist flach (da $- \otimes_R R \cong \mathrm{Id}$
und $\otimes$ mit $\oplus$ verträglich)

(b) Ist R HIR, $x \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$, so ist R/x
nicht flach:

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R \to R/x \to 0 \qquad \text{ist exakt}$$
(da x kein Nullteiler)

$$- \otimes_R R/x$$

$$\cancel{0} \to R/x \xrightarrow{0} R/x \to R/x \to 0 \qquad \text{nicht}$$

13. Satz (flache Moduln über HIR)

Für einen Modul M über einem HIR gilt:

$$M \text{ ist flach} \iff M \text{ ist torsionsfrei.}$$

Halber Beweis:

Ist M endlich erzeugt, folgt dies aus Bsp. 12.

Allgemeiner Fall: Weibel §3.1 (+ Ex. 3.2.3). $\square$

14. Zusammenfassung für $A = Ab$