

M5: Projektive, injektive & flache Moduln

1. Satz.: Für jede abelsche Kategorie sind

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ab}$$

und $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ab}$ linksexakt.

Allgemeinen Beweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$:

gegeben: $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ exakt in \mathcal{A}^{op} ,
also $0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ exakt in \mathcal{A} .

Zu zeigen:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) \text{ exakt in Ab.}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\psi \\ a \mapsto 0}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\psi \\ b \mapsto 0}}$

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

$a=0$,
denn f Epi

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

--> existiert, da
 f ein Kokern von g .

Allgemeinen Beweis zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$: analog

Kurzbeispiel zu $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ für $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$:

$$\text{Ab} \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_{\mathbb{Z}} M} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_R(M, -)} \end{array} \text{Mod}_R \quad (\text{K6, Bsp. 3(d)})$$

und Rechtsadjungierte sind linksexakt (K7, Satz 16).

□



Im Allgemeinen nicht exakt, z. B. ($A = A_6$):

$$\begin{array}{l} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, -) \end{array} \begin{array}{l} 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \end{array}$$

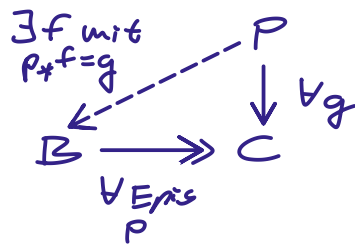
2. Def.: \mathcal{A} abelsche Kategorie

Ein Objekt P in \mathcal{A} ist **projektiv**, falls $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ exakt ist.

Ein Objekt I in \mathcal{A} ist **injektiv**, falls $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ exakt ist.

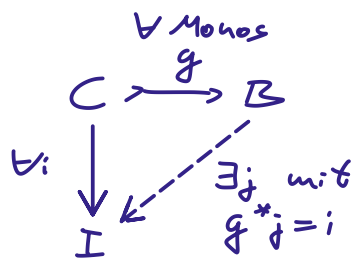
3. Notiz: P ist projektiv g.d.w. gilt:

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, C)$ surjektiv \forall Epis $B \twoheadrightarrow C$.



I ist injektiv g.d.w. gilt:

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, I)$ surjektiv \forall Monos $B \hookrightarrow C$



4. Satz (projektive Moduln)

Ein Rechts- R -Modul P ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist (d.h.: wenn es R -Modul Q und freien R -Modul F gibt mit $F \cong P \oplus Q$).

Inbesondere sind freie Moduln projektiv.*

(* Das hatten wir ohne diese Sprache bereits gesehen und gezeigt in MZ, Satz 6.)

5. Korollar (proj. Moduln über HIR)

Für Moduln M über einem HIR gilt:

$$M \text{ projektiv} \Leftrightarrow M \text{ frei}$$

Beweis:

(\Leftarrow) Satz 4

(\Rightarrow) Satz 4 + $\left[\begin{array}{l} \text{Untermoduln freier Moduln über HIR} \\ \text{sind frei} \end{array} \right]$

endl. erzeugter Fall: MZ, Satz 9

allgemein: Rotman, Corollary 4.19



6. Satz (injektive Moduln; Baersches Kriterium)

Für Rechts- R -Moduln I gilt:

$$I \text{ injektiv} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ Rechtsideale } J \rightarrow R: \\ J \rightarrow R \\ \downarrow \varphi_i \\ I \end{array} \right. \begin{array}{l} \exists \text{ } \\ \exists j \end{array}$$

□

7. Korollar (injektive Moduln über HIR):

Für einen Modul I über einem HIR R gilt:

$$I \text{ injektiv} \Leftrightarrow I \text{ divisibel}$$

$$(\text{d.h. } I \xrightarrow{r} I \text{ ist surjektiv } \forall r \in R \setminus \{0\})$$

Beweis:

Da R HIR, ist $R \xrightarrow{r} R$ injektiv für jedes $r \in R \setminus \{0\}$,
und jedes Ideal $J \rightarrow R$ ist von dieser Form.

Nach Baerschem Kriterium gilt also:

I injektiv

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Hom}_R(R, I)}_{\cong I} \xrightarrow{(\cdot r)^*} \underbrace{\text{Hom}_R(R, I)}_{\cong I} \text{ surjektiv } \forall r \neq 0$$

$$I \xrightarrow{\cdot r} I$$

□

8. Beispiele:

injektiv / \mathbb{Z}

\mathbb{Q}, \mathbb{R}

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, S^1$

nicht injektiv / \mathbb{Z}

\mathbb{Z}

\mathbb{Z}/m für $m \neq 1$

13. Satz (flache Moduln über HIR)

Für einen Modul M über einem HIR gilt:

$$M \text{ ist flach} \Leftrightarrow M \text{ ist torsionsfrei.}$$

Halber Beweis:

Ist M endlich erzeugt, folgt dies aus Bsp. 12.

Allgemeiner Fall: Weibel § 3.1 (+ Ex. 3.2.3). □

14. Zusammenfassung für $A = AB$

frei,
projektive

$$\mathbb{Z}^{\oplus n}$$

$$\mathbb{Z}/n$$

divisibel,
injektiv

$$\mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{R}$$

$$S^1$$

torsionsfrei,
flach

$$\mathbb{Z}$$

