M4: Kettenkomplexe

R ein Ring (nicht notwendig kommutativ)
Alle Moduln Rechts-R-Moduln.

1. <u>Def.:</u> Ein <u>Kettenkomplex</u> von R-Moduln ist eine Sequenz von R-Moduln & R-linearen Abbildungen

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

mit $d_i \circ d_{i+1} = 0$.
(Wir nennen $d_\bullet$ auch das „Differential" von $M_\bullet$ und schreiben die Bedingung kurz als „$d^2 = 0$".)

Ein <u>Morphismus von Kettenkomplexen</u>

$$f: (M_\bullet, d_\bullet^M) \longrightarrow (N_\bullet, d_\bullet^N)$$

ist eine Familie von Morphismen von R-Moduln $f_i: M_i \longrightarrow N_i$ mit $d_i^N f_i = f_{i-1} d_i^M$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & M_{i+1} & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & M_{i-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_{i-1}} & \\
\cdots \longrightarrow & N_{i+1} & \longrightarrow & N_i & \longrightarrow & N_{i-1} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Wir erhalten so eine Kategorie „Kom_R" oder „$Kom(Mod_R)$".

Homologie

2. **Def.:** Die <u>Homologiegruppen</u> eines Komplexes sind gegeben durch

$$H_i(M,d) := \frac{\ker(d_i)}{\operatorname{im}(d_{i+1})}.$$

($H_i(M,d)$ ist ein R-Modul, also insbes. eine „Gruppe".)

Elemente von $\ker(d_i)$ heißen <u>Zykel</u>,
" " $\operatorname{im}(d_i)$ " <u>Ränder</u>,
" " $H_i(M,d)$ " <u>Homologieklassen</u>

3. **Satz:** Für jedes i definiert H_i einen Funktor

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kom}(\mathrm{Mod}_R) \arrow[r, "H_i"] & \mathrm{Mod}_R. \\
(M,d) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & H_i(M,d) \arrow[d, "H_i(F)"] \\
(N,d) \arrow[r, mapsto] & H_i(N,d)
\end{tikzcd}$$

Beweis – <u>Def. von $H_i(F)$:</u>

$f_i(\ker d_i^M) \subseteq \ker(d_i^N)$
$f_i(\operatorname{im} d_{i+1}^M) \subseteq \operatorname{im}(d_{i+1}^N)$.

Also erhalten wir wohldefinierte Abb.

$$\begin{tikzcd}
\ker(d_i^M) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_i|_{\dots}"] & \frac{\ker(d_i^M)}{\operatorname{im}(d_{i+1}^M)} \arrow[d, "\overline{f_{i\dots}} =: H_i(F)"] \\
\ker(d_i^N) \arrow[r] & \frac{\ker(d_i^N)}{\operatorname{im}(d_{i+1}^N)}
\end{tikzcd}$$

[...] $\square$

Lange exakte Homologiesequenz

4. Notiz: Offenbar ist ein Komplex (M,d) genau dann exakt, wenn $H_i(M,d)=0 \ \forall i$.

5. Def.: Eine Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenhomomorphismen

$$(M',d) \xrightarrow{f} (M,d) \xrightarrow{g} (M'',d)$$

ist <u>exakt</u>, falls

$$M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i''$$

für jedes i eine exakte Sequenz von Moduln ist.

6. <u>Satz</u>: Für jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow (M',d) \xrightarrow{f} (M,d) \xrightarrow{g} (M'',d) \longrightarrow 0$$

bilden die Homologiegruppen eine lange exakte Sequenz der Form

$$\begin{array}{l}
\ldots \to H_{i+1}(M') \xrightarrow{f_*} H_{i+1}(M) \xrightarrow{g_*} H_{i+1}(M'') \\
\xrightarrow{\partial} H_i(M') \xrightarrow{f_*} H_i(M) \xrightarrow{g_*} H_i(M'') \\
\xrightarrow{\partial} H_{i-1}(M') \xrightarrow{f_*} H_{i-1}(M) \xrightarrow{g_*} H_{i-1}(M'') \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

(Hier f_*, g_* für die Abb. $H_*(f), H_*(g)$.)

Ist
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M',d) \arrow[r] \arrow[d] & (M,d) \arrow[r] \arrow[d] & (M'',d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (N',d) \arrow[r] & (N,d) \arrow[r] & (N'',d) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
eine kurze kommutative Leiter, so bilden die langen exakten Homologiesequenzen eine lange exakte Leiter.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'_{i+1} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d"] & M_{i+1} \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d"] & M''_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d"] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d"] & M''_i \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r, "\partial_i"] & M'_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & M_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & M''_{i-1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

<u>Def. von $\partial: H_i(M'') \longrightarrow H_{i-1}(M')$.</u>

Sei $[m''] \in H_i(M'')$, also $m'' \in M_i''$ mit $dm'' = 0$.

Da g_i surj: $\exists\ m \in M_i$ mit $g_i m = m''$. (1)

Dann ist $g_{i-1}(dm) = dg_i m = dm'' = 0$, also

$\exists\ m' \in M'_{i-1}$ mit $f_{i-1} m' = dm$. (2)

Ferner ist $dm' = 0$ denn $f_{i-2}(dm') = df_{i-1}(m') = ddm = 0$

und f ist injektiv.

Also $[m'] \in H_{i-1}(M')$.

Def. $\partial[m''] := [m']$.

<u>∂ wohldef.:</u>

Sei $\hat{m} \in M_i$ weiteres Element mit $g_i \hat{m} = m''$. (1)

Sei $\hat{m}' \in M'_{i-1}$ sodass $f_{i-1}\hat{m}' = d\hat{m}$. (2)

wegen (1) ist $g_i(m-\tilde{m})=0$, also
$\exists v' \in M_i'$ mit $f_i(v) = m-\tilde{m}$,
und
$$f_{i-1}(dv) = df_i(v) = dm - d\tilde{m} \overset{(2)}{=} f_{i-1}(m'-\tilde{m}')$$

Da f injektiv, folgt
$$m'-\tilde{m}' = dv,$$
also
$$[m'] = [\tilde{m}'].$$

Exaktheit $\left(\xrightarrow{f_*}\xrightarrow{g_*}\right)$:

Ist $[m] \in H_i(M)$ mit $[g_i m]=0$, so
$\exists\ m'' \in M''_{i+1}$ mit $g_i m = dm''$.

g surj:
$\exists\ \hat{m} \in M_{i+1}$ mit $g_{i+1}\hat{m} = m''$

Dann
$$g_i(m-d\hat{m}) = g_i(m) - dg_{i+1}(\hat{m}) = dm''-dm'' = 0,$$

also
$\exists m' \in M_i'$ mit $f_i m' = m - d\hat{m}$

Ferner $dm'=0$, denn $f_{i-1}dm' = df_i m' = \underbrace{dm}_{\substack{0 \\ \text{nach Annahme} \\ ([m]\in H_i(M))}} - \overbrace{dd\hat{m}}^{0 \text{ da } d\circ d = 0} = 0$, und f_{i-1} ist injektiv.

Also $[m'] \in H_i(M')$ mit $[f_i m'] = [m-d\hat{m}] = [m]$.

Exaktheit $\left(\xrightarrow{g_*}\xrightarrow{\partial}\right)$ ...

Exaktheit $\left(\xrightarrow{\partial}\xrightarrow{f_*}\right)$ ...

Natürlichkeit von ∂ ...

$\square$

6. Korollar: Schlangenlemma

Sei ein kommutatives Diagramm in Mod_R mit exakten Zeilen wie folgt mit schwarzen durchgezogenen Pfeilen dargestellt gegeben:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker(c) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(d) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(e) \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\partial"'] & \\
0 \arrow[r, dotted] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & M' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & N' \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 \\
& \mathrm{coker}(c) \arrow[r] & \mathrm{coker}(d) \arrow[r] & \mathrm{coker}(e) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

Dann existiert ein Morphismus ∂ in Mod_R derart, dass die in türkis eingezeichnete Sequenz exakt ist.
Ist eine der durch einen der gestrichelten schwarzen Pfeile erweiterte Zeile exakt, ist auch die durch den darüber/darunterliegenden gestrichelten türkisfarbenen Pfeil erweiterte Sequenz exakt.

Beweis:

Sind beiden Zeilen inklusive $\dashrightarrow$ exakt, können wir das schwarze Diagramm als k.e.S. von Komplexen auffassen, und Korollar ergibt sich direkt aus langer exakter Homologiesequenz.
Im Allgemeinen müssen wir zunächst L ersetzen durch $L/\ker f$ und N' durch $\mathrm{im}(g)$. [...]

$\square$

7. Beispiel: Das Fünfer-Lemma (M1, Satz 10) ist ein Spezialfall des Schlangenlemmas.

> **10. Satz:** Fünfer-Lemma
>
> Seien
> $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\cong f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
> zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R, und f, g, h Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Beweis:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker g \arrow[r] \arrow[d] & \ker h \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, out=0, in=180] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\cong f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} g \arrow[r] & \operatorname{coker} h \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da f und h Isos: $\ker f = 0$ und $\ker h = 0$ und
$\operatorname{coker} f = 0$ und $\operatorname{coker} h = 0$

Also hat die Sequenz die Form:

$$0 \to \underbrace{0 \to \ker g \to 0}_{\ker g = 0} \to \underbrace{0 \to \operatorname{coker} g \to 0}_{\operatorname{coker} g = 0} \to 0$$

Also ist g Monomorphismus und Epimorphismus, also – da Mod_R ausgewogen – ein Isomorphismus. $\square$

9. Def.: Eine Kettenhomotopie zwischen zwei Morphismen von Komplexen

$$(M_\bullet, d_\bullet^M) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (N_\bullet, d_\bullet^N)$$

ist eine Familie von Morphismen

$$\eta_i : M_i \longrightarrow N_{i+1} \quad \text{in } \mathrm{Mod}_R$$

mit

$$d_{i+1}^N \eta_i + \eta_{i-1} d_i^M = f_i - g_i \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}^M"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & M_i \arrow[r, "d_i^M"] \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\eta_{i-1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}^N"'] & N_i \arrow[r, "d_i^N"'] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Zwei Morphismen von Kettenkomplexen f und g sind homotop, geschrieben $f \simeq g$, wenn es eine Kettenhomotopie zwischen ihnen gibt.

Zwei Kettenkomplexe $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ und $(N_\bullet, d_\bullet^N)$ sind homotopieäquivalent, falls es Morphismen

$$(M_\bullet, d_\bullet^M) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (N_\bullet, d_\bullet^N)$$

gibt mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}$. Die Morphismen f und g nennen wir in diesem Fall Homotopieäquivalenzen.

9. Beispiel:

Der Komplex $M_\bullet := \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$

ist homotopieäquivalent zum Nullkomplex $0_\bullet$.

(Wähle $M_\bullet \underset{g=0}{\overset{f=0}{\rightleftarrows}} 0_\bullet$; $f \circ g = id_{0_\bullet}$; $g \circ f = 0 \simeq id_{M_\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "id"] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, "id"'] & 0 \arrow[r] \arrow[dl, "0"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
)

10. Notiz:

(a) Homotopie zwischen Kettenmorphismen ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Homotopie ist mit Komposition verträglich:
Ist $f_1 \simeq g_1$ und $f_2 \simeq g_2$, so auch $f_1 \circ f_2 \simeq g_1 \circ g_2$.

Wir erhalten so eine **Homotopiekategorie** $Ho(Kom_R)$

mit Objekten: Kettenkomplexe

Morphismen: Homotopieklassen von Kettenmorphismen

11. Satz: $f \simeq g \Rightarrow H_i(f) = H_i(g) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Seien $f, g : (M_\bullet, d) \rightrightarrows (N_\bullet, d)$ und eine Homotopie η von f nach g gegeben, also $f_i = g_i + d_{i+1}\eta_i + \eta_{i-1} d_i$.

Für $[m] \in H_i(M_\bullet, d)$ ist $H_i(f)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
H_i(f)[m] &= [f_i(m)] \\
&= [g_i(m) + d_{i+1}\eta_i(m) + \eta_{i-1}\underbrace{d_i(m)}_{=0,\text{ denn } m \text{ repräsentiert eine Homologieklasse}}] \\
&= [g_i(m)] + \underbrace{[d_{i+1}\eta_i(m)]}_{=0 \text{ in } H_i(N,d), \text{ da im Bild } d}
\end{aligned}$$

$\square$

12. Def.: Ein Quasiisomorphismus ist ein Morphismus von Kettenkomplexen f derart, dass $H_i(f)$ für jedes i ein Isomorphismus ist.

13. Korollar: Homotopieäquivalenzen sind Quasiisomorphismen.

Beweis: Sei f, g ein Paar von Homotopieäquivalenzen, also $f \circ g \simeq id$ und $g \circ f \simeq id$. Dann folgt aus Satz 11:

$$\underbrace{H_i(f\circ g)}_{H_i f \,\circ\, H_i g} = id \quad \text{und} \quad \underbrace{H_i(g \circ f)}_{H_i g \,\circ\, H_i f} = id \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

□

Die Umkehrung gilt nicht!

z.B.:
$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

ist ein Quasiisomorphismus, aber keine Homotopieäquivalenz. (In umgekehrte Richtung existiert nur die Nullabbildung. Diese ist hier kein Quasiisomorphismus, also nicht Teil einer Homotopieäquivalenz.)

Die Existenz eines Quasiisos $M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ garantiert nicht die Existenz eines Quasiisos $M_\bullet \longleftarrow N_\bullet$.

(siehe f oben)

13. Def. & Satz: Das *Tensorprodukt* zweier Kettenkomplexe $(M_\bullet, d_\bullet) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Kom}(\mathrm{Mod}_R)$ und $(N_\bullet, d_\bullet) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Kom}({}_R\mathrm{Mod})$ ist der Kettenkomplex
$(M_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (N_\bullet, d_\bullet) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Kom}(\mathrm{Ab})$, der in Grad i gegeben ist durch

$$\left[(M_\bullet, d_\bullet) \otimes_R (N_\bullet, d_\bullet)\right]_i := \bigoplus_{\substack{a,b:\\ a+b=i}} M_a \otimes_R N_b ,$$

mit Differential $d_\bullet$ das eindeutige Differential, für das für $m \in M_a$ und $n \in N_b$ gilt:

$$d_i(\underbrace{\underset{a}{m} \otimes \underset{b}{n}}_{i}) := \underbrace{\underbrace{d_a m}_{a-1} \otimes \underbrace{n}_{b}}_{i-1} + (-1)^a \underbrace{\underbrace{m}_{a} \otimes \underbrace{d_b n}_{b-1}}_{i-1}$$

Das ist wirklich ein Differential, also $d \circ d = 0$.

Sei $\mathbb{I}$ der folgende Kettenkomplex:

Grad 1 Grad 0

$$\cdots \to 0 \to 0 \to R \xrightarrow[(1,-1)]{d} R \oplus R \to 0 \to 0 \to \cdots$$

Basis 1 Basis $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$

14. Def (Alternative zu Def. 8):
Eine *Homotopie* zwischen Kettenmorphismen $f, g : M_\bullet \rightrightarrows N_\bullet$ ist eine Kettenmorphismus

$$H : M \otimes_R \mathbb{I} \longrightarrow N$$

mit $H(m \otimes \binom{1}{0}) = f(m)$
und $H(m \otimes \binom{0}{1}) = g(m)$.

15. Satz: Die beiden Definitionen (8 & 14) sind äquivalent.

Beweisskizze:

Ist η wie in Def. 8 gegeben ist, definiere H für $m \in M_i$ durch

$$H_i\left(m \otimes \binom{1}{0}\right) = f(m)$$
$$H_i\left(m \otimes \binom{0}{1}\right) = g(m)$$
$$H_{i+1}\left(m \otimes 1\right) = (-1)^i \eta_i(m) \qquad [\ldots]$$

$\square$