

M3: Tensorprodukt

R Ring mit 1 , (zunächst) kommutativ

1. Def.: Seien M, N, L R -Moduln. Eine Abbildung

$$f: M \times N \rightarrow L$$

heißt R -bilinear, falls sie R -linear in beiden Komponenten ist, also

$$f(u_1 r_1 + u_2 r_2, v) = f(u_1, v) \cdot r_1 + f(u_2, v) \cdot r_2$$

für alle $u_i \in M, r_i \in R$, und analog für v .

2. Def. & Satz: Das Tensorprodukt von zwei

R -Moduln M und N ist ein R -Modul

$$\boxed{M \otimes_R N}$$

zusammen mit einer R -bilinearen Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} \boxed{M \otimes_R N}$$

mit folgender \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\text{can}} & \boxed{M \otimes_R N} \\ & \searrow \text{\textcolor{teal}{\forall \text{ bilinear } f}} & \downarrow \\ & & T \\ & \swarrow & \uparrow \text{\textcolor{red}{\exists! \text{ linear } \tilde{f}}} \\ & & \boxed{M \otimes_R N} \end{array}$$

Für jede R -bilineare Abb. $f: M \times N \rightarrow T$ existiert genau ein R -lineare Abb. $\tilde{f}: \boxed{M \otimes_R N} \rightarrow T$ mit $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

(Formal: $(\boxed{M \otimes_R N}, \text{can})$ ist eine Darstellung von

$$F: \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Sets}$$

$$T \longmapsto \{ M \times N \xrightarrow{f} T \mid f \text{ bilinear} \} .)$$

Existenzbeweis: wie bei Vektorräumen

1. Betrachte freien \mathbb{R} -Modul $\bigoplus_{M \times N} \mathbb{R}$
 mit Basis $\{e(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$
 und die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{e} & \bigoplus_{M \times N} \mathbb{R} \\ (m, n) & \mapsto & e(m, n) \end{array}$$

Beachte:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{e} & \bigoplus_{M \times N} \mathbb{R} \\ \swarrow \text{bilinearen } f & & \searrow \exists! \text{ lineares } f' \\ & T & \end{array}$$

Aber e ist nicht \mathbb{R} -bilinear.

2. Teile aus $\bigoplus_{M \times N} \mathbb{R}$ den Untermodul Rel heraus,
 der erzeugt wird von allen Elementen der Form:

$$\begin{aligned} e(m_1 r_1 + m_2 r_2, n) - e(m_1, n) \cdot r_1 - e(m_2, n) \cdot r_2 \\ e(m, n_1 r_1 + n_2 r_2) - e(m, n_1) \cdot r_1 - e(m, n_2) \cdot r_2 \end{aligned}$$

(für alle $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$).

Definiere

$$M \otimes_{\mathbb{R}} N := \frac{\bigoplus_{M \times N} \mathbb{R}}{\text{Rel}}$$

und can: $M \times N \xrightarrow{e} \bigoplus_{M \times N} \mathbb{R} \twoheadrightarrow M \otimes_{\mathbb{R}} N$.

Diese Abbildung ist \mathbb{R} -bilinear und besitzt die geforderte UE. □

3. Notation: Für das Bild von $(m, n) \in M \times N$ unter $\text{can}: M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ schreiben $m \otimes n$.

4. Satz (Eigenschaften des Tensorprodukts)

R kommutativer Ring. Für beliebige R -Moduln $M, N, M_1, M_2, M_3, M_i (i \in I)$ und Ideale $\alpha \subseteq R$ haben wir kanonische Isomorphismen

(a)
$$M \otimes_R R/\alpha \cong \frac{M}{M \cdot \alpha}$$

$$m \otimes \bar{a} \mapsto \overline{m \cdot a}$$

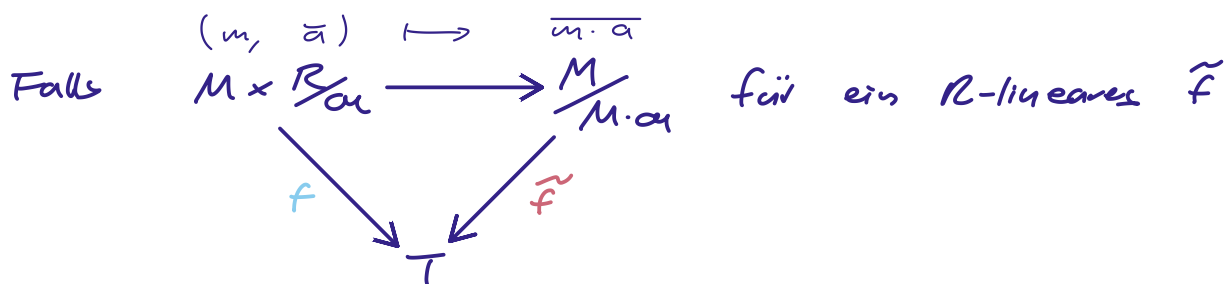
(b)
$$(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R M_3 \cong M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R M_3)$$
 mit $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$

(c)
$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$$
 mit $m \otimes n \mapsto n \otimes m$

(d)
$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$
 mit $(m_i)_i \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_i$

Beweis:

a: Sei R -bilineare Abb. $M \times R/\alpha \xrightarrow{f} T$ gegeben.



Kommutiert, so muss gelten: $\tilde{f}(\overline{m}) = f(m, 1)$

Also gibt es höchstens ein solches \tilde{f} .

Andererseits erhalten wir durch die Vorschrift

$\tilde{f}(\bar{m}) := f(m, \bar{1})$ tatsächlich ein wohl-def. \mathbb{R} -lineares \tilde{f} :

$$\begin{aligned} \tilde{f} \text{ } \mathbb{R}\text{-linear: } \tilde{f}(\bar{m}_1 \cdot a_1 + \bar{m}_2 \cdot a_2) &= \tilde{f}(\overline{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2}) \\ (m_1, m_2 \in M, a_1, a_2 \in \mathcal{A}) &= f(m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2, \bar{1}) \\ &= f(m_1, \bar{1}) \cdot a_1 + f(m_2, \bar{1}) \cdot a_2 \\ &= \tilde{f}(\bar{m}_1) \cdot a_1 + \tilde{f}(\bar{m}_2) \cdot a_2 \end{aligned}$$

f \mathbb{C} ilinear

\tilde{f} wohl-def.:

zz: $(m \mapsto f(m, \bar{1}))$ verschwindet auf $M \cdot \mathcal{A}$.

Ein Element von $M \cdot \mathcal{A}$ hat die Form $\sum_i m_i \cdot a_i$

für (endlich viele) $m_i \in M$ und $a_i \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} f(\sum_i m_i \cdot a_i, \bar{1}) &= \sum_i f(m_i, \bar{1}) \cdot a_i \\ f \text{ } \mathbb{C}ilinear & \begin{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{cases} \\ &= \sum_i f(m_i, \bar{a}_i) \\ &= \sum_i f(m_i, \bar{0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b)-(d): wie bei Vektorräumen [...]

□

5. Beispiele:

(a) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ (als \mathbb{R} -Modul: wähle oben in (a) $\mathcal{A} = 0$)

(b) $\mathbb{R}^{\oplus n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\oplus m} \cong \mathbb{R}^{\oplus n \cdot m}$ ((d), (a) & (c))

Allgemeiner: Ist M frei mit Basis $\{e_i \mid i \in I\}$
und N frei mit Basis $\{f_j \mid j \in J\}$,

so ist

$M \otimes_{\mathbb{R}} N$ frei mit Basis $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$

(c) $M \otimes_R R \cong M$ und $R \otimes_R N \cong N$
für beliebige R -Moduln M und N .

Insbesondere:

$$\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a$$

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/a \cong \mathbb{Z}/a$$

(d) $\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \mathbb{Z}/\text{ggT}(a,b)$

$$\left(\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \frac{\mathbb{Z}/a}{\mathbb{Z}/a \cdot b} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \cdot a + \mathbb{Z} \cdot b} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\text{ggT}(a,b)} \right)$$

Beispiel (b) beschreibt Tensorprodukt vollständig für Vektorräume.

Beispiele (b)-(d) zusammen mit Verträglichkeit mit \oplus (Satz 4 (d)) beschreibt Tensorprodukt vollständig für endlich-erzeugte abelsche Gruppen. z.B.

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 &\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \\ &\cong \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/\text{ggT}(3,5) \\ &\cong \mathbb{Z}/5 \end{aligned}$$

(e) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{R}/3 \cdot \mathbb{R} = 0$

(f) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]$

$$(\mathbb{Z}[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \cdot x^i)$$

(g) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x, y]$

(h) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x]$

6. Satz (Funktionalität)

Zu $f: M \rightarrow M'$ in Mod_R

und $g: N \rightarrow N'$ in Mod_R

existiert genau ein

$f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ in Mod_R

mit $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc}
 (m, n) & & (f(m), g(n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M \times N & \xrightarrow{f \times g} & M' \times N' \\
 \text{can} \downarrow & \searrow \text{bilinear} & \downarrow \text{can} \\
 m \otimes n & \xrightarrow{\quad} & f(m) \otimes g(n) \\
 M \otimes_R N & \xrightarrow{\quad} & M' \otimes_R N'
 \end{array}$$

Definiere diagonale Abb. als $\text{can} \circ (f \times g)$.

Diese ist R -bilinear, da $f \times g$ linear und can bilinear ist. Also erhalten wir $\xrightarrow{\quad}$. □

7. Notiz: Wir erhalten so Funktoren

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_R - : \text{Mod}_R & \longrightarrow & \text{Mod}_R \\
 N & \longmapsto & M \otimes_R N \\
 g \downarrow & & \downarrow \\
 N' & \longmapsto & M \otimes_R N' \quad \text{id}_M \otimes g
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 - \otimes_R N : \text{Mod}_R & \longrightarrow & \text{Mod}_R \\
 M & \longmapsto & M \otimes_R N
 \end{array}$$

(und diese sind wegen Satz 4(c) natürlich isomorph). Sogar:

$$- \otimes_R - : \text{Mod}_R \times \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Mod}_R$$

(Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien, so ist $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

Kategorie mit

Objekten: Paare (X, Y) mit $X \in \text{ob } \mathcal{C}, Y \in \text{ob } \mathcal{D}$

Morphismen: $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y'))$
 $= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y').$

Jetzt: R nicht kommutativ.

z.B. $R = \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$

z.B. $R = \mathbb{Z}[G]$ (G endliche Gruppe)

z.B. $R = \bigwedge_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ (äußere Potenz;

Basis: $1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2$

$e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$

$e_1 \wedge e_1 = 0 = e_2 \wedge e_2$)

Müssen unterscheiden zwischen $\text{Mod } R$: Rechts- R -Moduln
 ${}_R \text{Mod}$: Links- R -Moduln

für kommutatives R : $\otimes: \text{Mod } R \times \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } R$
 $\parallel \quad \quad \quad \downarrow \cong \quad \quad \quad \downarrow u$

für allgemeines R : $\hat{\otimes}: \text{Mod } R \times {}_R \text{Mod} \longrightarrow \text{Ab}$

Verwandtschaft von \otimes und $\hat{\otimes}$ für kommutatives R :

Für kommutatives R haben wir Iso. von Kategorien

$r: \text{Mod } R \xrightarrow{\cong} {}_R \text{Mod}$

$M \mapsto {}_R M$ mit $a \cdot m := m \cdot a$ für $m \in M, a \in R$

Sei $u: \text{Mod } R \longrightarrow \text{Ab}$ der Vergessfunkt. Wir

werden sehen:

$$u(M \otimes_R N) = M \hat{\otimes}_R r(N)$$

9. Def.: M Rechts- R -Modul

N Links- R -Modul

A abelsche Gruppe

Eine Abbildung $f: M \times N \longrightarrow A$ heißt

R -biadditiv falls sie additiv in beiden Komponenten ist (also

$$f(m+m', n) = f(m, n) + f(m', n)$$

$$f(m, n+n') = f(m, n) + f(m, n')$$

und ferner gilt:

$$f(m \cdot a, n) = f(m, a \cdot n)$$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $a \in R$.

10. Def.: M Rechts- R -Modul

N Links- R -Modul

Das Tensorprodukt von M und N ist eine

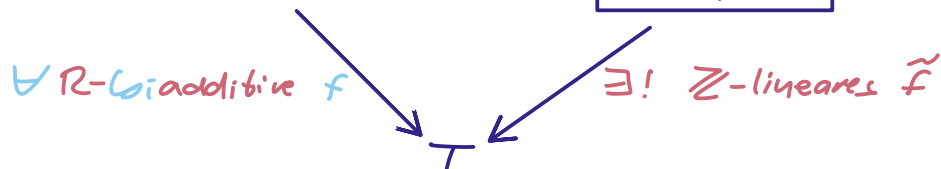
abelsche Gruppe $M \hat{\otimes}_R N$

zusammen mit einer R -biadditiven Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} M \hat{\otimes}_R N$$

mit folgender \mathbb{Z} :

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} M \otimes_R N$$

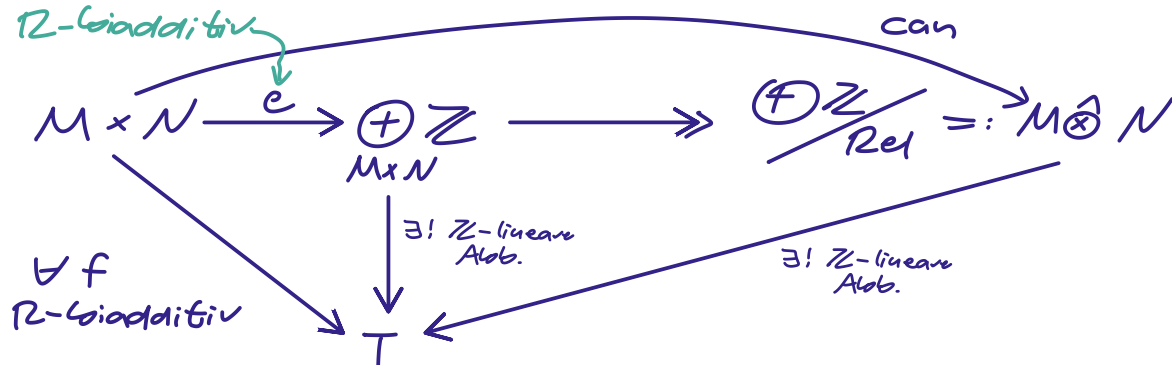


Für jede R -biadditive Abb. $f: M \times N \rightarrow T$ existiert

genau eine \mathbb{Z} -lineare Abb. $\tilde{f}: M \otimes_R N \rightarrow T$ mit $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

Existenzbeweis: Ähnlich kommutativem Fall

nicht \mathbb{Z} -biadditiv



mit Rel erzeugt von:

$$e(m+m', u) - e(m, u) - e(m', u)$$

$$e(m, u+u') - e(m, u) - e(m, u')$$

$$e(m \cdot a, u) - e(m, a \cdot u)$$

für $a \in R$



11. Satz (Funktorialität)

Zu $f: M \rightarrow M'$ in Mod_R

und $g: N \rightarrow N'$ in ${}_R \text{Mod}$

existiert genau ein Homomorphismus

$$f \hat{\otimes} g: M \hat{\otimes} N \rightarrow M' \hat{\otimes} N' \text{ in Ab}$$

mit $m \hat{\otimes} n \mapsto f(m) \hat{\otimes} g(n)$.



12. Satz: R, S Ringe

M S - R -Bimodul, also

- M ist Links- S -Modul
- M ist Rechts- R -Modul
- $(s \cdot m) \cdot r = s \cdot (m \cdot r) \quad \forall m \in M, r \in R, s \in S$

N Links- R -Modul

Es existiert genau eine Links- S -Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$

mit $s \cdot (m \otimes n) = (s \cdot m) \otimes n \quad (\text{für } m \in M, n \in N, s \in S)$

Beweis:

Für $s \in S$ ist $l_s: M \rightarrow M$ Rechts- R -linear:
 $m \mapsto s \cdot m$

Nach Satz 12 existiert also genau ein Gruppenhomomorphismus $l_s \otimes \text{id}: M \hat{\otimes}_R N \rightarrow M \hat{\otimes}_R N$
mit $m \otimes n \mapsto s \cdot m \otimes n$.

Das definiert eine Links- S -Modulstruktur [...]. \square

13. Beispiel: $R \xrightarrow{f} S$ Ringhomomorphismus,
 N Links- R -Modul.

$S \hat{\otimes}_R N$ ist ein Links- S -Modul.

(Fasse S als S - R -Bimodul auf via $S \times S \times R \rightarrow S$
 $(s', s, r) \mapsto s' \cdot s \cdot f(r)$.)

Unterbeispiel: $\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} A$ ist \mathbb{R} -VR für jede abelsche Gruppe A ,

$$\begin{aligned} \text{z. B. } (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}^{\oplus 5} \oplus \mathbb{Z}/3)) &\cong (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^{\oplus 5} \oplus (\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3) \\ &\cong \mathbb{R}^{\oplus 5} \oplus \underbrace{(\mathbb{R} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3)}_0 \end{aligned}$$

vgl. Bsp. 5(e)

14. Satz: R kommutativer Ring, M, N R -Moduln.

- (a) Es existiert genau eine R -Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$ mit $(m \otimes n) \cdot r = m \otimes n \cdot r$ (für $m \in M, n \in N, r \in R$),
- (b) $\widehat{can}: M \times N \rightarrow M \hat{\otimes}_R N$ ist R -bilinear, und
- (c) $(M \hat{\otimes}_R N, \widehat{can})$ ist ein Tensorprodukt von M und N in Mod_R .

15. Bemerkungen

(a) Wegen Satz 14 werden \otimes und $\hat{\otimes}$ gewöhnlich nicht in Notation unterschieden.

(b) Es gilt dann:

$$\begin{aligned} (m \otimes n) \cdot r &= m \otimes (n \cdot r) \\ &= m \otimes (r \cdot n) \\ &= (m \cdot r) \otimes n \\ &= (r \cdot m) \otimes n \\ &= r \cdot (m \otimes n) \end{aligned}$$

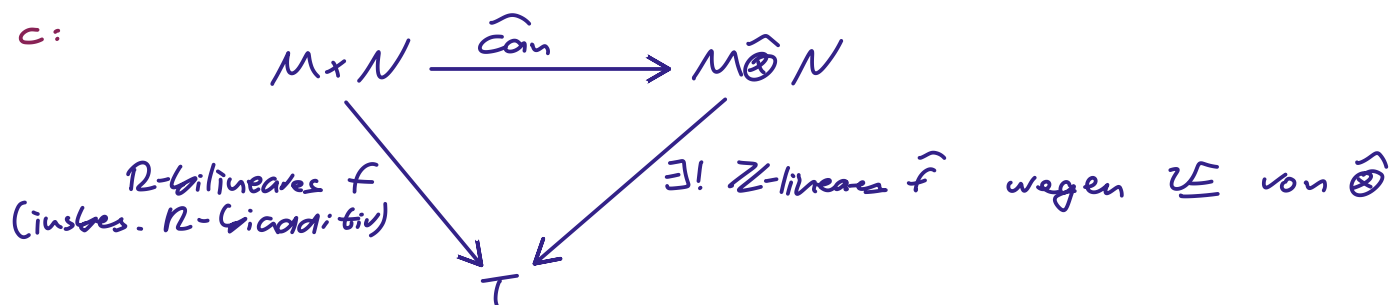
für alle $m \in M, n \in N, r \in R$.

Beweis zu Satz 14:

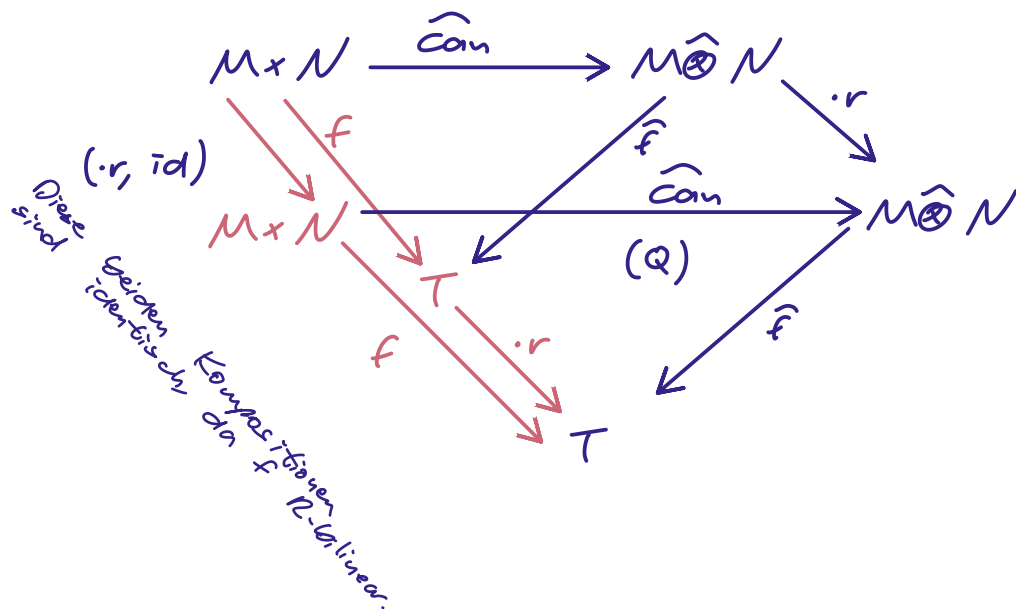
a: Satz 12, bis auf Rechts-Links-Schwäche.

b: [...]

c:



N.z.z.: \hat{f} ist \mathbb{R} -linear, d.h. Quadrat (Q) kommutiert:



Das Quadrat mit \hat{c} kommutiert, da \hat{c} \mathbb{R} -linear.
 \subseteq von $M \hat{\otimes} N$, angewendet auf rote Komposition,
 zeigt nun: $\hat{f} \cdot r = r \cdot \hat{f}$

[Dieser Beweis benutzt nicht die konkrete Konstruktion von $\hat{\otimes}$.

Beweis für konkrete Konstruktion:

$M \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} N$ wird von reinen Tensoren $m \otimes n$ erzeugt. Also reicht es zu zeigen:

$$\begin{aligned} \hat{f}((m \otimes n) \cdot r) &= \hat{f}(m \otimes n \cdot r) \\ &= f(m, n \cdot r) \\ &= f(m, n) \cdot r \quad (\text{da } f \text{ } \mathbb{R}\text{-bilinear}) \\ &= \hat{f}(m \otimes n) \cdot r \end{aligned}$$

] \square