M3: Tensorprodukt

R Ring mit 1, (zunächst) **kommutativ**

1. Def.: Seien M, N, L R-Moduln. Eine Abbildung

$$f: M \times N \longrightarrow L$$

heißt **R-bilinear**, falls sie R-linear in beiden Komponenten ist, also

$$f(m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2, n) = f(m_1, n) \cdot r_1 + f(m_2, n) \cdot r_2$$

für alle $m_i \in M$, $r_i \in R$, und analog für n.

2. Def. & Satz: Das **Tensorprodukt** von zwei R-Moduln M und N ist ein R-Modul $\boxed{M \otimes_R N}$ zusammen mit einer R-bilinearen Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\mathrm{can}} \boxed{M \otimes_R N}$$

mit folgender UE:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\forall \text{ bilinearen } f"'] & \boxed{M \otimes_R N} \arrow[d, "\exists! \text{ lineares } \tilde{f}"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Für jede R-bilineare Abb. $f: M \times N \to T$ existiert genau ein R-lineare Abb. $\tilde{f}: \boxed{M \otimes_R N} \to T$ mit $\tilde{f} \circ \mathrm{can} = f$.

(Formal: $\left(\boxed{M \otimes_R N}, \mathrm{can}\right)$ ist eine Darstellung von

$$F: \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
$$T \longmapsto \{ M \times N \xrightarrow{f} T \mid f \text{ bilinear} \}.$$)

Existenzbeweis: wie bei Vektorräumen

1. Betrachte freien R-Modul $\bigoplus_{M\times N} R$ mit Basis $\{e(m,n) \mid m\in M, n\in N\}$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} M\times N &\xrightarrow{e} \bigoplus_{M\times N} R \\ (m,n) &\longmapsto e(m,n) \end{aligned}$$

Beachte:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\forall \text{ bilinearen } f"'] & \bigoplus_{M\times N} R \arrow[d, "\exists! \text{ lineares } f'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Aber e ist nicht R-bilinear.

2. Teile aus $\bigoplus_{M\times N} R$ den Untermodul Rel heraus,

der erzeugt wird von allen Elementen der Form:

$$e(m_1r_1+m_2r_2, n) - e(m_1,n)\cdot r_1 - e(m_2,n)\cdot r_2$$
$$e(m, n_1r_1+n_2r_2) - e(m,n_1)\cdot r_1 - e(m,n_2)\cdot r_2$$

(für alle $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $r_1, r_2 \in R$).

Definiere

$$M\otimes_R N := \bigoplus_{M\times N} R \Big/ Rel$$

und can: $M\times N \xrightarrow{e} \bigoplus_{M\times N} R \twoheadrightarrow M\otimes_R N$.

Diese Abbildung ist R-bilinear und besitzt die geforderte UE. $\square$

3. Notation: Für das Bild von $(m,n)\in M\times N$ unter $\mathrm{can}: M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ schreiben $m\otimes n$.

4. Satz (Eigenschaften des Tensorprodukts)

R **kommutativer** Ring. Für beliebige R-Moduln $M, N, M_1, M_2, M_3, M_i\ (i\in I)$ und Ideale $\mathfrak{a}\subseteq R$ haben wir kanonische Isomorphismen

(a)
$$M\otimes_R R/\mathfrak{a} \cong M/M\cdot\mathfrak{a}$$
$$m\otimes\bar{a}\mapsto\overline{m\cdot a}$$

(b)
$$(M_1\otimes_R M_2)\otimes_R M_3 \cong M_1\otimes_R(M_2\otimes_R M_3)$$
mit $(m_1\otimes m_2)\otimes m_3 \mapsto m_1\otimes(m_2\otimes m_3)$

(c)
$$M\otimes_R N \cong N\otimes_R M$$
mit $m\otimes n \mapsto n\otimes m$

(d)
$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)\otimes_R N \cong \bigoplus_{i\in I}(M_i\otimes_R N)$$
mit $(m_i)_i\otimes n \mapsto (m_i\otimes n)_i$

Beweis:

a: Sei R-bilineare Abb. $M\times R/\mathfrak{a}\xrightarrow{f} T$ gegeben.

Falls
$$\begin{tikzcd}
M\times R/\mathfrak{a} \arrow[r, "{(m,\bar a)\mapsto\overline{m\cdot a}}"] \arrow[dr, "f"'] & M/M\cdot\mathfrak{a} \arrow[d, "\tilde f"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$
für ein R-lineares $\tilde f$

Kommutiert, so muss gelten: $\tilde f(\bar m) = f(m,1)$

Also gibt es höchstens ein solches $\tilde f$.

Andererseits erhalten wir durch die Vorschrift

$\tilde{f}(\bar{m}) := f(m, \bar{1})$ tatsächlich ein wohldef. R-lineares $\tilde{f}$:

$\tilde{f}$ R-linear:
$$\tilde{f}(\bar{m}_1 \cdot a_1 + \bar{m}_2 \cdot a_2) = \tilde{f}(\overline{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2})$$
$(m_1, m_2 \in M,\ a_1, a_2 \in R)$
$$= f(m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2, \bar{1})$$
$$= f(m_1, \bar{1}) \cdot a_1 + f(m_2, \bar{1}) \cdot a_2$$
f bilinear
$$= \tilde{f}(\bar{m}_1) \cdot a_1 + \tilde{f}(\bar{m}_2) \cdot a_2$$

$\tilde{f}$ wohl-def.:

zz: $(m \mapsto f(m, \bar{1}))$ verschwindet auf $M \cdot \mathfrak{a}$.

Ein Element von $M \cdot \mathfrak{a}$ hat die Form $\sum_i m_i \cdot a_i$

für (endlich viele) $m_i \in M$ und $a_i \in \mathfrak{a}$.

$$f(\textstyle\sum_i m_i \cdot a_i, 1) = \sum_i f(m_i, \bar{1}) \cdot a_i$$
f bilinear
$$= \textstyle\sum_i f(m_i, \bar{a}_i)$$
$$= \textstyle\sum_i f(m_i, \bar{0})$$
$$= 0$$

(b)-(d): wie bei Vektorräumen [...] $\square$

5. Beispiele:

(a) $R \otimes_R R \cong R$ (als R-Modul; wähle oben in (a) $\mathfrak{a} = 0$)

(b) $R^{\oplus n} \otimes_R R^{\oplus m} \cong R^{\oplus n \cdot m}$ ((d), (a) & (c))

Allgemeiner: Ist M frei mit Basis $\{e_i \mid i \in I\}$
und N frei mit Basis $\{f_j \mid j \in J\}$,
so ist
$M \otimes_R N$ frei mit Basis $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$

(c) $M \otimes_R R \cong M$ und $R \otimes_R N \cong N$
für beliebige R-Moduln M und N.

Insbesondere:
$\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/a \cong \mathbb{Z}/a$

(d) $\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(a,b)$

$$\left(\mathbb{Z}/a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b \cong \frac{\mathbb{Z}/a}{\mathbb{Z}/a \cdot b} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cdot a + \mathbb{Z}\cdot b \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(a,b) \right)$$

Beispiel (b) beschreibt Tensorprodukt vollständig für Vektorräume.

Beispiele (b)–(d) zusammen mit Verträglichkeit mit $\oplus$ (Satz 4 (d)) beschreibt Tensorprodukt vollständig für endlich-erzeugte abelsche Gruppen. z.B.

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/5$$
$$\cong \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(3,5)$$
$$\cong \mathbb{Z}/5$$

(e) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{R}/3 \cdot \mathbb{R} = 0$

(f) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]$ $\qquad$ $\left(\mathbb{Z}[x] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \cdot x^i \right)$

(g) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x,y]$

(h) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[x]$

6. Satz (Funktorialität)

Zu $f: M \longrightarrow M'$ in Mod_R

und $g: N \longrightarrow N'$ in Mod_R

existiert genau ein

$f \otimes g: M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ in Mod_R

mit $m \otimes n \longmapsto f(m) \otimes g(n)$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
(m,n) \arrow[d, mapsto] & M \times N \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr, "\text{bilinear}"] & M' \times N' \arrow[d, "\mathrm{can}"] & (f(m), g(n)) \arrow[d, mapsto] \\
m \otimes n & M \otimes_R N \arrow[r, dashed] & M' \otimes_R N' & f(m) \otimes g(n)
\end{tikzcd}$$

Definiere diagonale Abb. als $\mathrm{can} \circ (f \times g)$.

Diese ist R-bilinear, da $f \times g$ linear und can bilinear ist. Also erhalten wir $\dashrightarrow$. $\square$

7. Notiz:

Wir erhalten so Funktoren

$$M \otimes_R - : \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "g"'] & \longmapsto & M \otimes_R N \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes g"] \\
N' & \longmapsto & M \otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

und

$$- \otimes_R N : \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$$

$$M \longmapsto M \otimes_R N$$

(und diese sind wegen Satz 4 (c) natürlich isomorph). Sogar:

$$- \otimes_R - : \mathrm{Mod}_R \times \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$$

(Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, so ist $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ Kategorie mit

Objekten: Paare (X,Y) mit $X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $Y\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$

Morphismen: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(X',Y'))$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X')\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y'). \,)$$

Jetzt: R nicht kommutativ.

z.B. $R = \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$

z.B. $R = \mathbb{Z}[G]$ (G endliche Gruppe)

z.B. $R = \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ (äußere Potenz;

Basis: $1, e_1, e_2, e_1\wedge e_2$

$e_2\wedge e_1 = -e_1\wedge e_2$

$e_1\wedge e_1 = 0 = e_2\wedge e_2$)

Müssen unterscheiden zwischen Mod_R : Rechts-R-Moduln

${}_R\mathrm{Mod}$: Links-R-Moduln

$$\begin{tikzcd}
\text{für kommutatives } R: \quad \otimes: & \mathrm{Mod}_R \times \mathrm{Mod}_R \arrow[r] \arrow[d, "\parallel" description, "r\downarrow\cong"'] & \mathrm{Mod}_R \arrow[d, "U"'] \\
\text{für allgemeines } R: \quad \hat{\otimes}: & \mathrm{Mod}_R \times {}_R\mathrm{Mod} \arrow[r] & \mathrm{Ab}
\end{tikzcd}$$

Verwandtschaft von $\otimes$ und $\hat{\otimes}$ für kommutatives R:

Für kommutatives R haben wir Iso. von Kategorien

$$r: \mathrm{Mod}_R \xrightarrow{\cong} {}_R\mathrm{Mod}$$
$$M \longmapsto {}_{\llcorner}M \quad \text{mit } a\cdot m := m\cdot a \quad \text{für } m\in M,\ a\in R_{\lrcorner}$$

Sei $U: \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}$ der Vergissfunktor. Wir werden sehen:

„$U(M\otimes_R N) = M\,\hat{\otimes}_R\, r(N)$"

9. Def.: M Rechts-R-Modul

N Links-R-Modul

A abelsche Gruppe

Eine Abbildung $f: M \times N \longrightarrow A$ heißt **R-biadditiv** falls sie additiv in beiden Komponenten ist (also

$$f(m+m', n) = f(m,n) + f(m', n)$$
$$f(m, n+n') = f(m,n) + f(m,n')\,)$$

und ferner gilt:

$$f(m \cdot a, n) = f(m, a \cdot n)$$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $a \in R$.

10. Def.: M Rechts-R-Modul

N Links-R-Modul

Das **Tensorprodukt** von M und N ist eine abelsche Gruppe $\boxed{M \otimes_R N}$ zusammen mit einer R-biadditiven Abb.

$$M \times N \xrightarrow{\text{can}} \boxed{M \otimes_R N}$$

mit folgender UE:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\text{can}"] \arrow[dr, "\forall\, R\text{-biadditive } f"'] & & \boxed{M \otimes_R N} \arrow[dl, "\exists!\ \mathbb{Z}\text{-lineares } \tilde{f}"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Für jede R-biadditive Abb. $f: M \times N \to T$ existiert genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abb. $\tilde{f}: \boxed{M \otimes_R N} \to T$ mit $\tilde{f} \circ \text{can} = f$.

Existenzbeweis: Ähnlich kommutativem Fall

nicht R-biadditiv

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "\forall f\ R\text{-biadditiv}"'] & \bigoplus_{M \times N} \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\exists!\ \mathbb{Z}\text{-lineare Abb.}"] & \bigoplus \mathbb{Z} / Rel =: M \hat{\otimes} N \arrow[dl, "\exists!\ \mathbb{Z}\text{-lineare Abb.}"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

mit Rel erzeugt von:

$$e(m+m', n) - e(m,n) - e(m',n)$$
$$e(m, n+n') - e(m,n) - e(m,n')$$
$$e(m \cdot a, n) - e(m, a \cdot n)$$
$$\text{für } a \in R$$

$\square$

11. Satz (Funktorialität)

Zu $f: M \longrightarrow M'$ in Mod_R

und $g: N \longrightarrow N'$ in ${}_R Mod$

existiert genau ein Homomorphismus

$$f \hat{\otimes} g: M \hat{\otimes} N \longrightarrow M' \hat{\otimes} N' \quad \text{in } Ab$$

mit $\quad m \otimes n \longmapsto f(m) \otimes g(n)$.

$\square$

12. Satz: R, S Ringe

M S-R-Bimodul, also

- M ist Links-S-Modul
- M ist Rechts-R-Modul
- $(s\cdot m)\cdot r = s\cdot(m\cdot r)$ $\forall m\in M, r\in R, s\in S$

N Links-R-Modul

Es existiert genau eine Links-S-Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$

mit $s\cdot(m\otimes n) = (s\cdot m)\otimes n$ (für $m\in M$, $n\in N$, $s\in S$)

Beweis:

Für $s\in S$ ist $l_s\colon M \longrightarrow M$, $m \longmapsto s\cdot m$ Rechts-R-linear.

Nach Satz 12 existiert also genau ein Gruppenhomomorphismus $l_s\otimes \mathrm{id}\colon M\hat{\otimes}_R N \longrightarrow M\hat{\otimes}_R N$

mit $m\otimes n \longmapsto s\cdot m\otimes n$.

Das definiert eine Links-S-Modulstruktur [...]. $\square$

13. Beispiel: $R \xrightarrow{f} S$ Ringhomomorphismus,

N Links-R-Modul.

$S\hat{\otimes}_R N$ ist ein Links-S-Modul.

(Fasse S als S-R-Bimodul auf via $S\times S\times R \longrightarrow S$, $(s', s, r) \longmapsto s'\cdot s\cdot f(r)$).

Unterbeispiel: $\mathbb{R}\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} A$ ist $\mathbb{R}$-VR für jede abelsche Gruppe A,

z.B. $(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\oplus 5}\oplus \mathbb{Z}/3) \cong (\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})^{\oplus 5} \oplus \underbrace{(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/3)}_{0}$

$\cong \mathbb{R}^{\oplus 5}$

vgl. Bsp. 5(e)

14. Satz: R kommutativer Ring, M, N R-Moduln.

(a) Es existiert genau eine R-Modulstruktur auf $M \hat{\otimes}_R N$ mit $(m \otimes n)\cdot r = m \otimes n\cdot r$ (für $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$),

(b) $\widehat{\mathrm{can}}: M \times N \longrightarrow M \hat{\otimes}_R N$ ist R-bilinear und

(c) $(M \hat{\otimes}_R N, \widehat{\mathrm{can}})$ ist ein Tensorprodukt von M und N in Mod_R.

15. Bemerkungen

(a) Wegen Satz 14 werden $\otimes$ und $\hat{\otimes}$ gewöhnlich nicht in Notation unterschieden.

(b) Es gilt dann:

$$\begin{aligned}(m \otimes n)\cdot r &= m \otimes (n \cdot r)\\ &= m \otimes (r \cdot n)\\ &= (m \cdot r) \otimes n\\ &= (r \cdot m) \otimes n\\ &= r \cdot (m \otimes n)\end{aligned}$$

für alle $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$.

Beweis zu Satz 14:

a: Satz 12, bis auf Rechts-Links-Schwäche.

b: [...]

c:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\widehat{\mathrm{can}}"] \arrow[dr, "\substack{R\text{-bilineares } f \\ (\text{insbes. } R\text{-biadditiv})}"'] & & M \hat{\otimes} N \arrow[dl, "\exists!\ \mathbb{Z}\text{-lineares } \hat{f} \text{ wegen UE von } \hat{\otimes}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

N.2.2.: $\hat{f}$ ist R-linear, d.h. Quadrat (Q) kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\widehat{can}"] \arrow[d, "(\cdot r,\, id)"'] \arrow[dr, "f"] & & M \hat{\otimes} N \arrow[dl, "\hat{f}"'] \arrow[d, "\cdot r"] \\
M \times N \arrow[rr, "\widehat{can}", "(Q)"'] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\cdot r"] & M \hat{\otimes} N \arrow[dl, "\hat{f}"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Diese sind beiden identisch Kompositionen da f R-bilinear.

Das Quadrat mit $\widehat{can}$ kommutiert, da $\widehat{can}$ R-linear. UE von $M \hat{\otimes} N$, angewendet auf rote Komposition, zeigt nun: $\hat{f} \cdot r = r \cdot \hat{f}$

[Dieser Beweis benutzt nicht die konkrete Konstruktion von $\hat{\otimes}$.

Beweis für konkrete Konstruktion:

$M \hat{\otimes}_R N$ wird von reinen Tensoren $m \otimes n$ erzeugt. Also reicht es zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}((m \otimes n) \cdot r) &= \hat{f}(m \otimes n \cdot r) \\
&= f(m, n \cdot r) \\
&= f(m, n) \cdot r \quad (\text{da } f \text{ } R\text{-bilinear}) \\
&= \hat{f}(m \otimes n) \cdot r
\end{aligned}$$

] $\square$