M1: Moduln

R Ring (assoziativ mit 1)

Hauptsächlich für uns interessant:

endliche Gruppe

$$\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/n \qquad \underbrace{\mathbb{Z}/p \ (p \text{ prim}) \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R}}_{\text{Moduln über Körpern sind Vektorräume}} \qquad \mathbb{Z}[G]$$

$\uparrow$ $\mathbb{Z}$-Moduln sind abelsche Gruppen

$\uparrow$ später i.A. nicht kommutativ

1. Def: Ein **R-Rechtsmodul** ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer „Skalarmultiplikation"

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m,\ a) &\longmapsto m \cdot a \end{aligned}$$

für die gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \quad m \cdot 1 = m \\ \cdot \quad m \cdot (ab) = (m \cdot a) \cdot b \\ \cdot \quad m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b \\ \quad\ (m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall m,n \in M \\ \forall a,b \in R \end{array}$$

Eine **R-rechtslineare Abbildung / Morphismus von R-Rechtsmoduln** zwischen zwei R-Rechtsmoduln M und N ist ein Gruppenhomomorphismus

$$f: (M,+) \longrightarrow (N,+),$$

für den zusätzlich gilt:

$$f(m \cdot a) = f(m) \cdot a \qquad \forall m \in M, a \in R$$

Mod_R : Kategorie der R-Rechtsmoduln

2. Beispiele

$R = \mathbb{Z}$ Jede abelsche Gruppe $(M, +)$ ist auf genau eine Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul: Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$$
$$(m, z) \longmapsto \begin{cases} \overbrace{m + \dots + m}^{z \text{ Summanden}} & \text{falls } z > 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \\ -(m + \dots + m) & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Jeder Gruppenhomomorphismus zwischen ab. Gruppen ist $\mathbb{Z}$-linear. Also:

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Ab}$$

R ein Körper – Dann ist

$$\mathrm{Mod}_R = \mathrm{Vec}_R .$$

$R = \mathbb{Z}/n$ Ein $\mathbb{Z}/n$-Modul ist dasselbe wie eine ab. Gruppe M, in der gilt:

$$\underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ Summanden}} = 0 \quad \forall m \in M$$

Zum Bsp. ist $\mathbb{Z}/20 \oplus \mathbb{Z}/5$ ein $\mathbb{Z}/20$-Modul.

- R selbst ist ein R-Rechtsmodul via Multiplikation.
- $0 := \{0\}$ ist ein R-Modul für jedes R.

3. Def. & Satz: M ein R-Rechtsmodul

(a) Ein (R Rechts-) **Untermodul** $M' \subseteq M$ ist eine Untergruppe, auf die sich die Skalarmultiplikation einschränken lässt.

$$(m' \cdot a \in M' \quad \forall m' \in M', a \in R)$$

(b) Ist $M' \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die Quotientengruppe $M/_{M'}$ wieder ein R-Rechtsmodul bzgl.

$$\begin{aligned} M/_{M'} \times R &\longrightarrow M/_{M'} \\ \bar{m} \cdot a &\longmapsto \overline{m \cdot a} \end{aligned}$$

$M/_{M'}$ heißt **Quotientenmodul**.

4. Beispiele

(a) Die R-Rechtsuntermoduln von R heißen **Rechtsideale** von R.

Unterbsp.:
$$\begin{aligned} \{\text{Ideale von } \mathbb{Z}\} &= \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}\} \\ &= \{ n \cdot \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_0 \} \\ \{\text{Ideale von } \mathbb{Z}/_n\} &= \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/_n\} \\ &= \{ k \cdot \mathbb{Z}/_n \mid k \text{ ist Teiler von } n \} \end{aligned}$$

Unterbsp.: k Körper

$$\{\text{Ideale von } k\} = \{0, k\}$$

Unterbsp.: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in k \right\} \subseteq \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k)$

ist ein Rechtsideal

(b) Für jede R-rechtslineare Abb. $f: M \to N$ sind der Kern und das Bild Rechtsuntermoduln:

$$\ker(f) := \{ m \in M \mid f(m) = 0 \} \subseteq M$$
$$\mathrm{im}(f) := f(M) \subseteq N$$

Wir erhalten entsprechende Quotientenmoduln:

$$\mathrm{coker}(f) := N/_{\mathrm{im}(f)}$$

(& $\mathrm{coim}(f) := M/_{\ker(f)}$)

5. Def & Satz: M, N R-Rechtsmoduln

$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ $(:= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M,N))$ ist eine abelsche Gruppe via

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \quad \text{für } m \in M$$

Neutrales Element ist

$$\begin{aligned} 0: M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

6 Notiz: Diese additive Struktur ist mit Komposition verträglich.

(a) $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$

(b) $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

Daher erhalten wir auf Mod_R Funktoren

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M,-): \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[d, "h_*"'] \\ N' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_R(M,N') \end{tikzcd}$$

$h_*(f) = h \circ f$

$$\mathrm{Hom}_R(-,N): \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}^{op}$$

((a) sagt: h_* ist Gruppenhomomorphismus.
(b) sagt: h^* ist Gruppenhomomorphismus.)

7. Bemerkung: Für kommutatives R ist $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ sogar R-Modul, via

$$(f\cdot a)(m) := f(m\cdot a),$$

denn diese Abbildung ist dann R-linear.

8. Def.: Eine Sequenz von R-Modulhomomorphismen

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

ist **exakt**, wenn gilt: $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

die an jeder Stelle exakt ist.

9. Notiz:

(a) Für Morphismen $i : M \longrightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

⓪ i injektiv

① i Mono

② $(i \circ f = 0 \implies f = 0)$

③ $\ker(i) = 0$

④ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N$ ist exakt.

(b) Für Morphismen $q : M \longrightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

⓪ q surjektiv

① q Epi

② $(f \circ q = 0 \implies f = 0)$

③ $\operatorname{coker}(q) = 0$

④ $M \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$ ist exakt..

Beweis:

(a) ⓪ ⟺ ①: wie in Ab

(Elemente $m \in M$ entsprechen 1:1 R-Modulmorphismen $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & M \\ 1 & \longmapsto & m \end{array}$)

⓪ ⟺ ③, ③ ⟺ ④, ① ⟹ ② klar

② ⟹ ①: Ist $i \circ f = i \circ g$ in Mod_R, folgt

$i \circ f - i \circ g = 0$, also

$i \circ (f - g) = 0$.

Aus ② folgt nun $f - g = 0$, d.h. $f = g$.

(b) ähnlich □

10. Satz: Fünfer-Lemma

Seien
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f", "\cong"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R, und f, g, h Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Allgemeiner:

Seien
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, two heads, "e"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f", "\cong"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & P \arrow[d, tail, "j"] \\
K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P
\end{tikzcd}$$

zwei exakte Sequenzen in Mod_R, und e, f, g, h, j Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Ist

e ein Epimorphismus und
f ein Isomorphismus und
h ein Isomorphismus und
j ein Monomorphismus,

so ist g ein Isomorphismus.

Beweis: ganz unkategoriell: Wir zeigen durch Diagrammjagd, dass g bijektiv ist.

einfache Version: g injektiv:

$$\begin{tikzcd}
\text{da } f \text{ injektiv} & 0 \arrow[d, equal] \arrow[rd, mapsto] & \operatorname{im}(\lambda) = \ker(\mu) & & \\
& \exists\, \ell \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] \arrow[ddd, mapsto, bend right] & m \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] & \mu(m) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\in$}"] \arrow[ddd, mapsto, bend left] & = 0, \text{ da } h \text{ injektiv} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f"', "\cong"] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\lambda'"'] & M' \arrow[r, "\mu'"'] & N' \arrow[r] & 0 \\
& f(\ell) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[r, mapsto] & 0 & \\
& 0, \text{ da } \lambda' \text{ injektiv} & & &
\end{tikzcd}$$

Also $m = 0$.

allgemeine Version: g surjektiv:

Sei $m' \in M'$. Zu zeigen: $\exists\, m_0 \in M : g(m_0) = m'$

$$\begin{tikzcd}
& & \text{⑪}\ \lambda(\ell) \arrow[ddddd, mapsto, bend right, "\text{⑫}"'] & & & \\
& \text{⑩}\ \exists\, \ell \arrow[ru, mapsto] \arrow[dddd, mapsto, bend left] & \text{⑦}\ \exists\, m \arrow[r, mapsto] & \text{③}\ \exists\, n \arrow[r, mapsto] \arrow[ddd, mapsto, bend left] & \text{④}\ \nu(n) \arrow[ddd, mapsto, bend left] & \text{⑥}\ = 0 \text{ da } j \text{ injektiv} \\
K \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "e"] & L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\cong f"'] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "h"', "\cong"] & P \arrow[d, "j"] & \\
K' \arrow[r, "\kappa'"] & L' \arrow[r, "\lambda'"] & M' \arrow[r, "\mu'"] & N' \arrow[r, "\nu'"] & P & \\
& & m'\ \text{①} \arrow[r, mapsto] & \mu'(m')\ \text{②} \arrow[r, mapsto] & \nu'\mu'(m') = 0\ \text{⑤} & \\
& \exists\, \ell'\ \text{⑨} \arrow[r, mapsto] & m' - g(m)\ \text{⑧} \arrow[r, mapsto] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$(\nu' \circ \mu' = 0$, da Sequenz exakt$)$

⑫ $g(\lambda(\ell)) = m' - g(m)$, also $g(\underbrace{\lambda(\ell) + m}_{\text{Wähle also } m_0 .}) = m'$.

□

11. Satz: Universelle Eigenschaft des Quotienten

Sei $M' \subseteq M$ ein R-Rechtsuntermodul. Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R mit $f(M') = 0$ existiert genau eine Faktorisierung durch die Quotientenabb.

$q: M \longrightarrow M/M'$.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[rrr, bend left, "0"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & N & f(m) \\
& & M/M' \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{F}"'] & \ni [m] \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

mit $\bar{F} \circ q = f$

$\square$

12. Korollar (Isomorphiesatz)

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$M/\ker f \xrightarrow[\bar{F}]{\cong} \mathrm{im}(f)$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}", "\cong"'] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{id}", "\cong"'] & M/\ker f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{F}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & \mathrm{im}(f) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aus 5er-Lemma folgt: $\bar{F}$ ist Isomorphismus.

$\square$